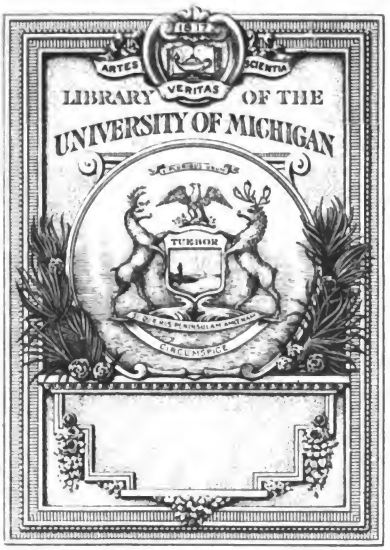
A 546351

Digitized by Google

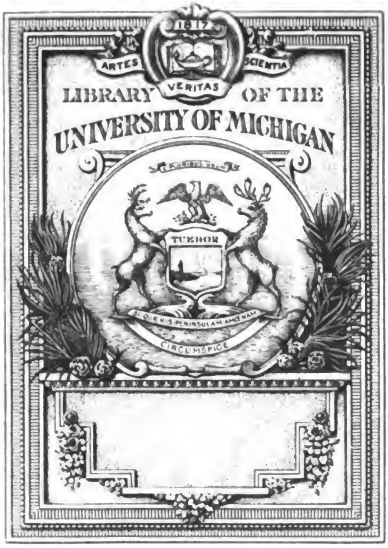


Digitized by Google

QA
462
.D56

113878

Digitized by Google



Digitized by Google

Lemay

QA
462
.D56

113818

Digitized by Google

Digitized by Google

Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens

für den

Unterricht

in der

Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre.

Für Lehrer,

welche

mathematische Gegenstände als Mittel zur allgemeinen Bildung benutzen wollen.

Von

Dr. F. A. W. Diesterweg,

Director des Lehrer-Seminars in Mörs.

Mit drei Steintafeln.

Elberfeld, 1829.

Büschler'sche Verlags-Buchhandlung und Buchdruckerei.

Digitized by Google

Hist. of Ed.
Seibel
9-25-30
22346

Vorrede.

Der der vorliegenden Schrift zu Grund liegende Leitfaden erschien zuerst 1822 ohne die, jetzt der zweiten Auflage beigegebene Anweisung zum Gebrauche desselben.

Der Leitfaden selbst enthielt in der ersten, wie jetzt in der zweiten Auflage, Fragen, Aufgaben, Andeutungen und Fingerzeige, fast nirgends aber Antworten und Ausführungen. Diese sollte nach meiner Absicht der Schüler unter Leitung des Lehrers selbst finden, welches voraussetzte, daß der Lehrer sich vor dem Gebrauche des Leitfadens bereits in den Besitz der erforderlichen Kenntnisse gesetzt hatte. Diese Voraussetzung war wohl zum Theil etwas ungerecht, und sie ging in Betreff vieler Lehrer, welche sich des Leitfadens bedienen wollten, zu hoch, und nicht leicht dürfte ein Besitzer desselben zu finden gewesen sein, der nicht auch gern die Behandlungsweise der Aufgaben, wie ich sie vornehme, kennen gelernt hätte. Dieser Mangel erschwerte offenbar den Gebrauch und die Einführung des Leitfadens. Andere Arbeiten erlaubten es mir bisher nicht, mehrseitigen, in dieser Hinsicht an mich ergangenen Aufforderungen zu genügen. Da aber der Verleger eine zweite Auflage des Leitfadens veranstalten wollte, so wünschte ich früher Versäumtes nachzuholen und durch Beifügung einer Anweisung zur Behandlung des Leitfadens den Gebrauch desselben zu erleichtern und zu fördern.

Statt des ursprünglichen einen Büchleins erscheinen derselben daher jetzt zwei: der Leitfaden selbst, für den Schüler bestimmt, daher mit Weglassung der der ersten Auflage beigegebenen Einleitung und anderer nur für den Lehrer bestimmter Theile, und die vorliegende Anweisung zum Gebrauche desselben, welche ich allein in des Lehrers Hand zu sehen wünsche, wenn nicht etwa

1-29-40

Digitized by Google

Einer, in Ermangelung eines Lehrers, sich durch Privatfleiß den Inhalt anzueignen suchen sollte.

Was ich durch diese Arbeiten bezwecke, muß ich hier wenigstens in der Kürze aus der ausführlichen Einleitung zur ersten Auflage, welche zugleich eine Kritik der bis 1822 erschienenen elementarisch-geometrischen Schriften enthielt, wiederholen. Nach meiner Ansicht ist der Hauptzweck der Behandlung der Raumlehre in Schulen ein formaler. Der Schüler soll durch den Unterricht in ihr denken und das Gedachte klar, fest und gewandt darstellen lernen. Ob er die einzelnen Sätze, an welchen er seine Geisteskraft übt, behält oder nicht, darauf kommt im Wesentlichen nichts an, obgleich dieses in der Regel eine nothwendige Folge der gründlichen Behandlung sein wird. Der erstrebte Zweck ist erreicht, wenn er sich durch den Unterricht in der Raumlehre Sicherheit und Gewandtheit in der Bearbeitung mathematischer und anderer, die Denk- und Darstellungskraft in Anspruch nehmender Gegenstände aneignet.

Eben deßhalb braucht sich der Grundunterricht in der Raumlehre nicht an irgend ein System der Geometrie anzuschließen, welches nur dasjenige aufnimmt, was zur Begründung eines weiter fortgeführten mathematischen Unterrichts unentbehrlich ist, und Alles wegläßt, was nicht unmittelbar und nothwendig zur Architektonik des Systems gehört. Vielmehr hat der beabsichtigte elementarische Unterricht vorzugsweise solche Sätze aufzustellen, welche die Entwickelung des jugendlichen Geistes in vorzüglichem Grade begünstigen, und welche, ohne Vieles vorauszusetzen, eine vielseitige Behandlungsweise zulassen. Zugleich braucht sich ein solcher Unterricht nicht ängstlich innerhalb der herkömmlichen Schranken zu halten; vielmehr darf und soll er verwandte Gegenstände mit in seinen Kreis ziehen, besonders, wenn sie zur rationellen Entwickelung des Schülers viel beitragen. Also erheischt es ja, nach meinem Bedünken, überall ein gründlicher Elementarunterricht. Nach systematischem Wissen und nach eigentlicher Wissenschaft soll derselbe gar nicht streben. Sein Hauptzweck bleibt: Erregung der Denkkraft des Schülers, Förderung selbstständiger Entwickelung des Erkenntnißvermögens und der damit zusammenhängenden, bestimmten und gewandten Darstellungsweise in Worten und Sätzen durch Urtheile und Schlüsse.

Der Vortheil einer solchen elementarischen Behandlung der

Raumlehre oder einiger Theile derselben hat sich mir und Anderen, welche den vorliegenden Leitfaden gebraucht haben, ganz unzweideutig bewährt.

Wenn die Mitglieder des hiesigen Seminars denselben durchgemacht, und, unter Leitung des Lehrers, sämmtliche Fragen und Aufgaben mündlich und schriftlich bearbeitet haben, so sind sie in der Behandlung dahin einschlagender Gegenstände so gereift, daß ihnen die Erfassung jeder systematischen Raumlehre auch nicht die allermindeste Schwierigkeit mehr macht, und wenn in dieser Beziehung die hiesige Anstalt vielleicht Einiges, was Anerkennung verdient, geleistet hat, so bin ich geneigt, dieses zum Theil der Einrichtung des Leitfadens zuzuschreiben. Andre Lehrer haben ähnliche Erfahrungen gemacht. Ich übergebe denselben daher in der zweiten Auflage mit der dazu gehörigen Anweisung dem Publikum mit mehr Vertrauen, als dieß bei irgend einer meiner anderen Schriften der Fall gewesen ist.

Der einzige Anstoß, den mancher Lehrer vielleicht noch an dem Inhalte desselben nehmen könnte, dürfte in der Allgemeinheit der Behandlung vieler Sätze liegen. Allein nach meiner Ansicht liegt der Werth des mathematischen Unterrichts besonders in der allgemeinen Behandlungsweise. Bei concreten Fällen soll man in der Regel nicht stehen bleiben, sondern auch schon im frühesten Unterricht den Schüler an die Aufsuchung und Auffassung der allgemeinen, alle einzelnen Fälle beherrschenden Regeln und Gesetze gewöhnen, und dadurch seinem Geiste einen Zug zu allgemeiner, oder abstracter Erfassung der Wahrheiten aneignen; ja die Behandlung concreter Fälle hat in der Regel nur in so fern Werth, als dadurch die Aufstellung der allgemeinen Regeln, welchen alle einzelnen Fälle untergeordnet sind, begünstigt wird.

Nicht leicht begnüge man sich daher bei irgend einem Schüler mit der Aufstellung einzelner Fälle. Der einsichtsvolle Lehrer wird dabei die nothwendige Berücksichtigung der Verschiedenheit der Köpfe seiner Schüler nicht aus den Augen verlieren.

Die Schüler, für welche ich den vorliegenden Leitfaden bestimmt habe, sind in gehobenen Elementarschulen, in höheren Bürgerschulen, unteren und mittleren Gymnasialklassen und in Schullehrer-Seminarien anzutreffen. Bei allen diesen ist in Betreff der Raumlehre, wie des gesammten mathematischen Unterrichts, der formelle Zweck der Hauptzweck, welcher eben so gut an den Elementen, wie

Digitized by Google

an den höher liegenden Theilen der Mathematik erreicht werden kann.

Dem einzelnen Schüler soll, nach meinem Plane, der Leitfaden in die Hand gegeben werden. Der Lehrer braucht zu seiner Vorbereitung die dazu gehörige Anweisung; außer den Lehrstunden, wie sich von selbst versteht. In denselben wird eine Frage oder Aufgabe des Leitfadens nach der andern vorgenommen und dem Schüler die Anforderung gestellt, dieselbe zu beantworten oder zu lösen. Ist dieses gelungen, und hat man die Gewißheit erlangt, daß alle Schüler sich der Einsicht des Einzelnen bemächtigt haben, so verlangt man, daß sie durch Privatfleiß die Antworten und Auflösungen genau, reinlich und sauber schriftlich darstellen. Soll dieses gelingen, so muß in den Lehrstunden bei der mündlichen Darstellung auf besondere Genauigkeit und Gewandtheit des Ausdrucks gesehen werden. Es ist dieß eine sehr wichtige, unerlaßliche Sache. Nicht nur die Denkkraft wird durch also behandelten gründlichen Unterricht in vorzüglichem Grade erregt, sondern auch die Sprech- und Darstellungskraft des Schülers. Beides steht mit einander in genauer Wechselbeziehung, und das Eine ist durch das Andere bedingt.

So mögen denn diese Schriften in ihrer zweiten und vollständigeren Erscheinung dem Hauptzwecke alles eigentlichen Unterrichts, der Geistesbildung, ersprießlichen Vortheil leisten! Nicht ohne diese Hoffnung übergebe ich sie hiermit dem Publikum.

Mörs, im Juli 1829.

Der Verfasser.

Inhalt und Blattweiser.

		Seite
§. 1.	Raum und Körper — — — —	1
§. 1.	Fläche — — — — — —	5
§. 3.	Linie — — — — — —	10
§. 4.	Punkt — — — — — —	14
§. 5.	Fortsetzung und Erweiterung der Ansicht — —	16
§. 6.	Bewegung — — — — — —	22
§. 7.	Zeit — — — — — —	24
§. 8.	Richtung und Lage — — — — —	27
§. 9.	Punkt und Linie — — — — —	31
§. 10.	Aufgaben an Formverbindungen durch Linien —	36
§. 11.	Winkel — — — — — —	47
§. 12.	Figur — — — — — —	59
§. 13.	Figuren zu lesen und zu bezeichnen — —	83
§. 14.	Das Diktiren der Figuren — — —	87
§. 15.	Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz — —	87
§. 16.	Ausmessung — — — — — —	91
§. 17.	Figurirte Zahlen — — — — —	109
§. 18.	Trigonometrische Grundanschauungen — —	111
§. 19. §. 20.	Begriffe. (Logisch-mathematische Uebungen) —	127 132

Digitized by Google

		Seite
§. 21.	Mathematische Grundsätze, Definitionen u. s. w.	140
§. 22.	Logische Grundsätze und deren Anwendung —	155
§. 23.	Urtheile. (Fortsetzung der logisch-mathematischen Uebungen) — — — — — —	158
§. 24.	Schlüsse. (Zweite Fortsetzung der logisch-mathematischen Uebungen — — — —	160
§. 25.	Theile jedes Lehrsatzes und Umkehrung der Sätze	165
§. 26.	Aufgabe und Beweis — — — —	167
§. 27.	Fläche und Punkt — — — — —	176
§. 28.	Fläche und Linie — — — — —	179
§. 29.	Mehrere Flächen — — — — —	181
§. 30.	Prismen — — — — — —	185
§. 31.	Der Cylinder — — — — —	188
§. 32.	Der Kegel — — — — — —	189
§. 33.	Die Pyramide — — — — —	191
§. 34.	Die Kugel — — — — — —	192
§. 35.	Die regelmäßigen Körper — — — —	195
§. 36.	Vermischte Aufgaben — — — —	198

Digitized by Google

§. 1. Raum und Körper.

1. Tisch, Tafel, Ofen, Stuhl, Buch ꝛc.
2. In diesem Zimmer — im Raume dieses Zimmers.
3. Diese Gegenstände liegen theils an, theils nicht an einander; auch liegen sie neben, aber nicht in, sondern außer einander.
4. Die Gegenstände des Raumes liegen außer einander.
5. Ueberall ist Raum. Nirgends ist nicht Raum (Nicht-Raum).

   Anmerkung. Manche Schüler nehmen das Wort Raum synonym mit Platz, gemäß dem Sprachgebrauche des gemeinen Lebens. In diesem Falle füge der Lehrer die Fragen bei: Heißt Raum so viel, wie Platz? Oder ist auch da Raum, wo kein Platz ist? Was versteht man unter leerem, was unter erfülltem Raum? Was ist Platz?
6. Der Raum ist folglich unendlich groß.
7. Der Raum dieses Zimmers ist von dem ganzen Raume ein Theil.
8. Den Weltraum denke ich mir in sehr viele (unzählig oder unendlich viele) Theile getheilt. — Unzählig (unendlich oder unangebbar) viele Theile machen zusammen den unendlichen Raum.
9. Wir stellen uns den unendlichen Raum nicht aus Theilen zusammengesetzt vor, sondern nur Theile in ihm. Diese Theile des Raumes entstehen (sind) in dem Weltraume und sind in ihm und durch ihn; der Weltraum kann nicht aus Theilen entstanden gedacht werden. (Wäre dieses möglich, so hätte er eine endliche, meßbare, nicht eine unendliche, unmeßbare Größe.)
10. Die Vorstellung des Raumes entsteht nicht dadurch, daß wir Theil-Vorstellungen zusammenfassen und zu einer Gesammt-Vorstellung verbinden, sondern die Vorstellung „Raum" ist eine unmittelbare Vorstellung, kein Begriff, sondern eine Anschauung.

Digitized by Google

11. Der allgemeine Raum fängt nirgends an, und er hört nirgends auf.

12. Wir nennen darum den Raum unumfaßbar, unbegränzt, unmeßbar, unermeßlich, unendlich.

13. Die Theile des allgemeinen Raumes hänzen ohne Unterbrechung, nicht unterbrochen (nicht diskret), sondern stetig zusammen.

14. Jeden Theil des Raumes kann man in noch kleinere Theile getheilt denken. Die Theilbarkeit dieser Raumtheile hat keine Gränzen; sie geht bis in's Unendliche. Jeder (auch der kleinste) Raumtheil ist (in der Vorstellung) noch theilbar.

15. Die denkbare Vergrößerung oder Verkleinerung eines bestimmten Raumes findet nirgends Gränzen. Jeder Raum kann über alle Gränzen hinaus vergrößert und verkleinert gedacht werden.

16. Weil der unendliche Raum gränzenlos ist, so kann er keine Form, keine Gestalt haben; er ist ohne Gestalt. — Da der Himmel in der Form eines kugelförmigen Gewölbes erscheint, so denken sich Manche den Raum unter der Gestalt einer Kugel. Diese falsche Vorstellung muß berichtigt werden.

17. Denke ich mir alle Gegenstände aus dem Raume dieses Zimmers weg, so bleibt doch die Vorstellung „des Raumes dieses Zimmers." So lang ich an Zimmer denke, kann ich die Vorstellung „Raum" gar nicht wegdenken, nicht davon absehen (abstrahiren), und sobald ich wirkliche (leibliche) Gegenstände denke, denke ich auch „Raum" mit.

18. Ohne die Vorstellung „Raum" ist ein Sinnending gar nicht denkbar.

19. Gegenstände (Objecte), welche einen begränzten Raum einnehmen, heißen Körper.

20. Körper heißt jedes Ding, welches einen begränzten Raum einnimmt.

21. Außerwesentliche Merkmale des Begriffes Körper sind z. B. die Farbe, verhältnißmäßige (relative) Größe, Art der Gestalt, Bestandtheile, Ort u. s. w. Wesentlich heißen die Merkmale des Körpers, ohne welche er gar nicht gedacht werden kann, d. h. seine Ausdehnung oder (irgend welche) Größe und (allseitige) Begränzung.

22. Einen Körper, an dem wir, alle andern Eigenschaften wegdenkend, bloß die Vorstellung „begränzte Ausdehnung" festhalten, nennen wir einen geometrischen oder mathematischen Körper, ihn unterscheidend vom physischen Körper mit allen seinen übrigen (qualitativen) Eigenschaften.

23. Ein geometrischer Körper ist ein solcher, dessen einzige Merkmale sind: „Ausdehnung und Begränzung." Der physische

Digitized by Google

hat außer diesen Merkmalen noch alle die anderen (unzähligen), mit welchen er in der Natur auftritt, und mit welchen er auf unsere Sinne wirkt und sich dadurch als ein Einzelwesen (Individuum) offenbart.

24. Der geometrische Körper unterscheidet sich dadurch vom Weltraume, daß jener begränzt, dieser unbegränzt ist, daß jener folglich Gestalt hat, dieser aber gestaltlos ist.

25. Verleihe ich dem unbegränzten Raume in meiner Vorstellung Gränzen, so ist aus der Vorstellung „unbegränzter Raum" die Vorstellung (geometrischer) „Körper" entstanden. — Denke ich mir umgekehrt am Körper die Gränze weg, seine begränzte Ausdehnung über alle Gränzen erweiternd, so ist die allgemeine Vorstellung „Raum" an die Stelle der Vorstellung „Körper" getreten. Von den beiden Vorstellungen „Raum" und „Körper" entsteht die eine aus der andern durch das Hinzufügen oder Wegdenken der Vorstellung „Begränzung."

26. „Ein jeder Körper ist *ausgedehnt*" heißt: er nimmt einen gewissen (bestimmten) Raum ein, oder: er erfüllt einen Theil des Weltraumes.

27. Einen Körper kann ich nach *allen möglichen* Richtungen ausgedehnt denken, und wirklich ist auch jeder Körper, von einem Punkte in ihm aus, nach allen möglichen Richtungen ausgedehnt. Doch lassen sich vorzugsweise *drei Hauptrichtungen* unterscheiden, von denen jede von der andern eine möglichst-verschiedene Lage hat.

28. Diese drei Hauptrichtungen heißen: *Länge*, *Breite* und *Höhe* oder Dicke oder Tiefe.

29. Sind an einem Körper diese Dehnungsrichtungen ungleich groß, so nennt man *gewöhnlich* die *größte* „Länge", die mittlere „Breite", die kleinste „Höhe" oder „Dicke".

30. Die drei Stäbchen werden in einem Punkte so zusammengehalten, daß jedes auf den beiden anderen senkrecht steht.

31. Man bemerkt diese Gestalt an den Blitzableitern, welche über die Häuser in der Gestalt eines Kreuzes hervorragen. Zwei Eisenstangen durchkreuzen sich in der Richtung des Bodens, auf welchen das Gebäude steht (horizontal), und auf demselben erhebt sich eine dritte Stange gerade (senkrecht) aufwärts.

32. Die Richtung „Länge" ist gerade (d. h. ganz) entgegengesetzt den Richtungen „Breite" und „Höhe"; die „Breite" ist entgegengesetzt den Richtungen „Länge" und „Höhe", und die Richtung „Höhe" ist entgegengesetzt den Richtungen „Länge" und „Breite."

33. Man nennt *dieselbe* Richtung an *verschiedenen* Körpern bald Höhe, bald Dicke, bald Tiefe. Es kommt dabei vorzüglich auf den Standpunkt des Sprechenden (Anschauenden)

Digitized by Google

an. Was man von unten die Höhe eines Thurmes nennt, heißt von oben betrachtet Tiefe. Sind zwei Richtungen eines Körpers, wie man dieselben auch gelegt denken möchte, einander gleich, z. B. an einem Balken, Baum u. s. w., so spricht man von der Dicke desselben. Bei dem Ausdruck „Dicke" denkt man gewöhnlich an die Umfassung, Umspannung oder Ausmessung der Richtung, welche man Dicke nennt.

34. Bei einem Flusse, Brunnen oder Glase u. s. w. spricht man von der Tiefe, weil man sich in der Regel über der also genannten Richtung befindet. Ist man in den Brunnen hinein gestiegen, so ist die vorige Tiefe zur Höhe geworden. Von der Dicke eines Brunnens spricht man nicht, weil es hier nichts zu umspannen giebt.

35. Unter der Tiefe eines Zimmers oder Gebäudes versteht man die Größe der Entfernung der Thüre von der gegenüber stehenden Wandfläche.

36. Die größte Ausdehnung eines Baumes, Thurmes und Berges heißt für den gewöhnlichen Standpunkt des Beschauers „Höhe", einer Mauer „Länge" ꝛc.

37. Unter der Größe eines Gartens versteht man die Größe (den Raum) seiner Ausdehnung auf der Erdoberfläche — eines Waldes dasselbe — eines Menschen dessen „Höhe" oder die Weite der Entfernung vom Scheitel bis zur Fußsohle — einer Stadt den Flächenraum, welcher innerhalb ihrer Mauern liegt.

38. Unter der Dicke eines Baumes, eines Menschen, einer Säule oder einer Birne versteht man die Größe derjenigen Ausdehnung, welche der größten Ausdehnung dieser Körper, hier Länge genannt, gerade entgegengesetzt ist.

39. Wir sehen und fühlen nicht das Innere, sonden das Aeußere der Körper.

40. Die unter Nro. 40 vorkommenden Urtheile können auch so (allgemein verständlicher) ausgedrückt werden:

Jeder (wirkliche) Körper oder jedes leibliche Ding kann durch Bewegung der Urstoffe (durch Bewegung von einem Punkte aus) entstanden gedacht werden. Der Raum, welchen ein physischer Körper einnimmt, wird von ihm ausgefüllt oder erfüllt. Man spricht daher von der „Erfüllung der Bewegung eines leiblichen Dinges oder Urstoffes." Denken wir uns diese Erfüllung weg, d. h. verneinen wir sie in Gedanken; so fällt die Masse oder der Stoff, aus welchem der Körper besteht, weg, und es bleibt an der Stelle des Körpers nur der bestimmte Raum übrig, welchen derselbe einnahm, d. h. der geometrische Körper. Denken wir uns auch dessen Begränzung weg, so haben wir den Begriff des Körpers, dadurch,

Digitized by Google

daß wir ein wesentliches Merkmal des Begriffes Körper wegnehmen, zerstört, und es bleibt nichts übrig als die Vorstellung „Raum" und zwar unbegränzter (unendlicher) Raum. Diese Vorstellung ist aber so einfach, daß wir kein Mannigfaltiges in ihr unterscheiden. Wir können von ihr nur das eine Merkmal „Ausdehnung" angeben. Da die Vorstellung „Raum" kein „Begriff" ist, so kann er also auch (im eigentlichen Sinne des Wortes) nicht mehr „begriffen" werden; und da wir genöthigt sind, ihm das Merkmal „Unendlichkeit" beizulegen, so ist der Vorstellung »Raum« dasjenige Dunkel beigemischt, welches jede Unendlichkeit an sich trägt. Kein Verstand kann eine Unendlichkeit begreifen; auch ist die Vorstellung „Raum" nicht ein Erzeugniß (Produkt) des Verstandes; sondern wir tragen diese Vorstellung in uns (als Form des Anschauungsvermögens für äußere Dinge); sie gehört so zum Wesen unserer sinnlichen Anschauung, wie die Ideen „Gott", „Unsterblichkeit", „Freiheit" zum Wesen unserer Vernunft.

§. 2. Fläche.

1. Die Gränze eines Körpers oder die Gränzen des Körpers sind da, wo er aufhört. Nicht außer-, sondern innerhalb seiner Gränzen befindet er sich. Seine Größe oder seine Ausdehnung hört da auf, wo die Gränze ist.
2. Daß zwei Körper dieselbe Gränze haben können, zeigen anschaulich zwei gleich große Bogen Papier, zwei gleich große Fensterscheiben und jede zwei Körper, welche sich so zusammen legen lassen, daß sie auf einander passen.
3. Die Gränze des Körpers hat zwei Dehnungsrichtungen.
4. Die einen Körper begränzenden Flächen haben Ausdehnung nach zwei Richtungen, nach Länge und Breite. Der Fläche überhaupt kommt Länge und Breite, nicht aber Dicke zu. Denn als Fläche muß sie verschieden sein vom Körper. Dieß würde aufhören, wenn ihr Dicke zukäme, in welchem Falle sie nicht mehr Fläche, sondern Körper sein würde.
5. »Körper« und »Fläche« haben die beiden Merkmale »Länge« und »Breite« mit einander gemein. Sie unterscheiden sich dadurch von einander, daß der Fläche das dem Körper zukommende Merkmal »Dicke« fehlet. Der Körper ist Raum erfüllend, die Fläche Körperliches begränzend. Nimmt man das Wort »Raum« im Sinne des gewöhnlichen Lebens, so nimmt die Fläche keinen Raum ein.
6. Abstrahirt man von der Dicke des Körpers, so bleiben noch die Merkmale Länge und Breite, d. h. die Vorstellung »Fläche« bleibt übrig.

Digitized by Google

7. Denke ich umgekehrt zu den Merkmalen Länge und Breite noch das Merkmal Dicke hinzu, so habe ich aus der Vorstellung »Fläche« die Vorstellung »Körper« gebildet. — Jenes geschah durch Absehen oder Wegnehmen in Gedanken, durch (logische) Zergliederung (Analysis), dieses durch Verknüpfung oder (logische) Verbindung (Synthesis).

8. Aus Nro. 4 geht hervor, daß die Fläche kein Körper und folglich auch kein dünner Körper ist, weil der Fläche nicht alle Merkmale des Körpers zukommen.

9. Wenn man daher auch 10000 zusammenpassende Flächen auf einander legen oder auf einander gelegt denken wollte, so würde doch das Ganze keinen Körper bilden, weil, da die einzelne Fläche keine Dicke hat, auch durch Zusammenfügung aller keine Dicke, und folglich auch kein Körper entsteht. Denn das Merkmal, welches hier dem Theile fehlt, kann dem Ganzen nicht zukommen, weil der Theil hier ganz gleichartig ist mit dem Ganzen, und weil es zur Bildung des Körpers auf die Größe der Ausdehnungen, Länge, Breite und Dicke genannt, gar nicht ankommt. Ein kleiner Körper ist eben so gut ein Körper, wie ein großer.

   Jenes »auf« muß, wie aus dem eben Gesagten folgt, in »in« verwandelt werden. Zusammenpassende Flächen fallen, wenn sie gehörig zusammengelegt gedacht werden, nicht auf, sondern in einander. Jenes ist der Fall mit zusammengefügten wirklichen Körpern. Zusammenfallende Flächen, bloß als Flächen gedacht, durchdringen einander. — Auch geometrische Körper können unter den gehörigen Bedingungen in einander fallend gedacht werden.

10. Die Gränzfläche der Kugel hat eine andere Form oder Gestalt als die Oberfläche der Walze, und beide sind wieder verschieden von den Oberflächen der Tische oder Spiegel. (Wir denken uns hierbei diese Gränzflächen vollkommen glatt, wie die Natur sie nicht liefert.) Die vollkommne Spiegelfläche ist gerade oder eben, ihre Theile liegen alle in derselben Richtung; die Seiten-Oberfläche des Cylinders ist nicht eben, sondern gekrümmt, um den Cylinder herum; die Oberfläche der Kugel ist noch vollkommner gebogen oder gekrümmt. Die Theile der Oberflächen der Walze und der Kugel liegen nicht in derselben Richtung.

11. Daher gibt es zwei Arten Flächen: gerade und krumme.

12. Wir denken uns die Grundflächen der Tischplatten, Spiegel, Fußböden, Zimmerwände, des stillstehenden Wassers in Teichen ꝛc. als gerade oder ebene Flächen.

13. Eine ebene Fläche ist eine solche, deren Theile alle in derselben Richtung neben einander liegen. Man erkennt sie

Digitized by Google

daran, daß man nach allen Richtungen gerade Linien in sie hinein gelegt denken kann, so daß alle Theile dieser geraden Linien mit der Ebene zusammen fallen.

14. Zwei Ebenen können in Hinsicht ihrer Orte, wo sie sich befinden, und in Hinsicht ihrer räumlichen Ausdehnung oder Größe, auch in der Art ihrer Begränzung, nicht aber in Hinsicht der Form oder Gestalt (der neben einander liegenden Theile) verschieden sein.

15. Es gibt nur eine Art ebener Flächen. Die mögliche Ortsverschiedenheit und die Art der Begränzung zweier Ebenen begründet keinen wesentlichen Unterschied in ihnen als Ebenen.

16. Es gibt verschiedenartig-gekrümmte Flächen. Anders gekrümmt ist die Oberfläche der Kugel als die Oberfläche der Walze, des Eies, des Kegels, des menschlichen Schädels, des scheinbaren Himmelsgewölbes u. s. w.

17. Manche krumme Flächen sind nach allen Richtungen, andere nicht nach allen Richtungen krumm. Jene nennt man allseitig, diese einseitig krumme Flächen. Ein Beispiel jener Art giebt die Kugeloberfläche; Beispiele zu dieser die Oberflächen der Walze und des Kegels.

18. Die sinnlich anschauliche Darstellung der Cylinder- und Kegeloberfläche durch einen Papierstreifen hat keine Schwierigkeit; die Kugeloberfläche läßt sich aber durch die Krümmung einer ebenen Fläche nicht darstellen.

19. Eine einseitig krumme Fläche ist eine solche, in welche man nach einer Richtung gerade Linien gelegt denken kann; eine vielseitig (oder allseitig) krumme Fläche ist eine solche, mit welcher man gerade Linien in keiner Richtung zusammenfallend denken kann.

20. Die einzige, überall und nach allen Richtungen auf dieselbe Weise gekrümmte Fläche ist die Kugeloberfläche.

21. Der Unterschied der Begriffe »Ebene« und »Fläche« läßt sich leicht bestimmen. Alle Theile einer Fläche können in derselben Richtung liegen. Dieses ist der Fall, wenn die Fläche eine Ebene ist. Kurz: die Ebene ist eine Art Fläche; jede Ebene ist eine Fläche; aber nicht jede Fläche ist eine Ebene. Es giebt mehr Flächen als Ebenen. Der Begriff Ebene ist dem Begriff Fläche untergeordnet; jener Begriff ist enger als dieser, weil er nicht auf so viele Gegenstände angewandt werden kann als dieser. Dagegen kommen dem Begriffe Ebene mehr Merkmale zu, als dem Begriff Fläche, da sich die Merkmale des Geschlechtsbegriffes Fläche auch in dem Artbegriff Ebene, und außerdem noch das Merkmal oder diejenigen Merkmale in dem Begriffe Ebene vorfinden, welche die Fläche zur Ebene machen.

Digitized by Google

22. Nicht nothwendig brauche ich bei den Vorstellungen »Fläche«, »ebene« und »krumme Fläche« an ihre Begränzung zu denken. Denn die Verschiedenheit der Begränzung hat auf die Art der Fläche keinen Einfluß. Ja, ich kann mir sogar Flächen denken, welche über alle bestimmten und unbestimmten Gränzen hinaus ausgedehnt sind. Flächen, deren Gränzen nicht gedacht werden, heißen unbegränzte Flächen, und solche, welche über jede Gränze hinaus gedacht werden, heißen unendlich große Flächen.

23. Ist eine Fläche nicht in sich selbst begränzt, so läßt sie sich nach allen Richtungen ihrer Ausdehnung verlängert, oder verkürzt denken. Denkt man sich die Fläche nach den beiden Richtungen »Länge« und »Breite« ausgedehnt, so kann sie auch nach Länge und Breite verlängert oder verkürzt, oder nach einer dieser Richtungen verlängert und nach der andern verkürzt (besser: verkürzt gedacht) werden. Die sich selbst begränzenden, ein fortlaufendes, in sich zurückkehrendes Ganze bildenden Flächen, z. B. die Oberflächen der Kugeln, können nur in sich selbst, also gar nicht verlängert, wohl aber verkürzt gedacht werden.

24. Eine krumme Fläche ist eine solche, deren Theile nicht in derselben Richtung liegen, in welche man daher nicht nach jeder beliebigen Richtung gerade Linien legen kann.

25. In allen früheren Sätzen ist immer die Rede von unsern Vorstellungen, wie wir uns die Gegenstände, von welchen die Rede war, denken; nicht aber davon, ob und wie diese Gegenstände in der Wirklichkeit so angetroffen werden, wie wir sie uns denken. Sehen wir nun zu, ob die wirklichen (leiblichen) Dinge so beschaffen sind und die Eigenschaften an sich tragen, die wir bestimmten; so finden wir einen wesentlichen Unterschied; nicht nur bloß darin, daß wir bloß die räumliche Ausdehnung der Körper auffassen, sondern auch darin, daß wir den Raum stetig denken müssen, welchen der wirkliche Körper nicht stetig erfüllt. Ebenso entspricht die wirkliche Gränze eines Körpers nur ganz unvollkommen unsern Vorstellungen. Wir denken uns die Flächen ohne alle Erhöhung und Vertiefung, wie sie in der Wirklichkeit gar nicht angetroffen werden. Daher dürfen unsere Vorstellungen von den Dingen nie mit den Dingen selbst verwechselt werden, und diese sind, auch in ihrer höchsten Vollkommenheit, nur Zeichen oder Bilder der Vorstellungen.

26. Die Körperwelt, namentlich die Gestaltung derselben, wird uns vorzüglich durch die Sinne des Gesichts und des Tastens klar. Daher hat man diese Sinne auch die mechanischen genannt. Der Sinn des Gesichts zeigt uns indeß nichts anders als Schatten und Licht, d. h. mehr oder weniger

Digitized by Google

hell erleuchtete Gegenstände, und der Tastsinn findet Widerstrebungen, woraus der Verstand schließt, daß Körper vorhanden seien. Ueberhaupt nehmen wir mit diesem Sinne nur das Aeußere der Körper, ihre Gränzen, wahr.

27. Daraus wird klar, daß wir die Körperwelt nicht durchschauen, sondern nur anschauen. Wir durchschauen kein einziges leibliches Ding; wir durchschauen nichts. Wir haben von leiblichen Dingen nur An-, nicht aber Durchsichten. Gott allein durchschaut die Dinge. Wir wissen daher nicht, was die Dinge an sich sind, sondern nur, wie sie uns erscheinen. In Beziehung auf wirkliche Dinge können wir daher bloß sagen: die Sache erscheint uns so und so, nicht aber: die Sache ist so und so. Ganz anders verhält es sich mit den Gegenständen unserer Vorstellungen, welche sich nicht auf äußere leibliche Dinge, sondern auf Gegenstände innerer (reiner oder mathematischer) Anschauung beziehen. Hier herrscht vollkommne Gewißheit; hier sprechen wir nicht vom Erscheinen, sondern vom Sein. Eine Fläche ist (nicht: »erscheint«) ein nach Länge und Breite ausgedehntes (gedachtes) Ding.

28. Jede unbegränzt gedachte oder über alle Gränzen hinaus verlängert gedachte Ebene scheidet den Weltraum in zwei Theile. Da wir aber genöthigt sind, uns den Weltraum gränzenlos vorzustellen; da sich folglich seine Größe gar nicht bestimmen, und nur angeben läßt, daß seine Größe jede ausgedehnte Größe übertreffe; so können wir uns auf die Beantwortung der Frage: »ob der Weltraum durch eine Ebene in gleiche oder ungleiche Theile getheilt werde«, gar nicht einlassen. Diese Frage läßt sich nicht beantworten.

29. In jeden körperlichen Raum kann man sich unzählig viele Flächen gelegt denken. Denn die Fläche erfüllt als Nicht-Körper keinen körperlichen Raum.

30. Die Fläche hat als räumlich ausgedehntes Ding eine Größe. Sie kann folglich in Theile getheilt gedacht werden. Jeden dieser Theile kann ich wieder getheilt denken, und so fort, so daß sich nicht angeben läßt, wo diese Theilung in Gedanken ihre Gränze finden sollte. Vielmehr sehe ich ein, daß diese Theilbarkeit der Flächen nirgends eine Gränze findet, daß also die Fläche bis in's Unendliche, d. h. über jede angebliche Gränze hinaus, getheilt gedacht werden kann.

Ob der Stoff der leiblichen Dinge bis in's Unendliche getheilt werden kann, wird immer ungewiß bleiben, und man hat Grund genug, daran zu zweifeln. Aber an der unbegränzten Theilbarkeit des Raumes kann nicht gezweifelt werden.

31. An der Stelle, wo ein Theil einer Fläche aufhört, fängt der daran liegende Theil ohne alle Unterbrechung an; die Theile

Digitized by Google

einer Fläche hängen also stetig zusammen. Die Fläche ist eine stetige Größe.

32, 33 u. 34. Wir haben weiter oben das Gerade dem Krummen entgegengesetzt; das Nicht-Gerade ist das Krumme, und das Nicht-Krumme ist das Gerade. Ein Drittes giebt es nicht, und ein Ding kann daher nicht gerade und krumm zugleich sein. Da nun Flächen stetig ausgedehnte Größen sind, eine krumme Fläche also stetig krumm, d. h. mit jedem, auch dem kleinsten ihrer Theile krumm, und eine Ebene in jedem ihrer Theile gerade ist; so kann also auch im strengsten Sinne des Wortes (im mathematischen Sinne) kein Theil einer krummen Fläche als eben betrachtet werden, weil derselbe nicht eben, sondern krumm ist. In weniger strengem Sinne mag es gestattet werden, eine krumme Fläche aus sehr vielen, darum sehr kleinen, ebenen Flächen entstanden zu denken und zu sagen, daß ein sehr (unendlich) kleiner Theil einer krummen Fläche als eben betrachtet werden könne. Je kleiner ein solcher Theil einer krummen Fläche genommen wird, desto mehr nähert er sich der Ebene.

35. Jede Fläche besteht aus Theilen, und diese Theile liegen auf gewisse Weise stetig neben einander. Die Art dieses Neben-einanderliegens der Theile bestimmt die Gestalt oder Form der Fläche. Es giebt daher keine Flächen ohne eine bestimmte Nebenordnung ihrer Theile. Freilich können die Theile einer Fläche gleich- oder ungleichmäßig, regelmäßig oder unregelmäßig neben einander liegen; immer aber kommt jeder Fläche eine gewisse Gestalt zu.

§. 3. Linie.

1. Da, wo eine Fläche aufhört, ist ihre Gränze. Die Gränze der Fläche hat nur eine Dehnungsrichtung, Linie genannt.
2. Eine Linie ist daher die Gränze einer Fläche.
3. Sie hat nur eine Dehnungsrichtung, welche man Länge nennt. Hätte die Linie auch eine gewisse Breite (oder Höhe), so wäre sie keine Linie, sondern eine Fläche; und hätte sie nebst der Länge auch Breite und Dicke, so wäre sie ein Körper.
4. In dem Vorigen liegen die gemeinsamen und unterscheidenden Merkmale der drei Begriffe »Körper«, »Fläche« und »Linie.« Gemeinsam haben sie das Merkmal »Länge«; überdieß haben Fläche und Körper noch das Merkmal »Breite« mit einander gemein. Die Fläche hat außer der Länge (der Linie) auch Breite, und der Körper noch eine dritte Dehnungsrichtung. Daß man dessen ungeachtet nicht sagen könne: »die Fläche

Digitized by Google

ist eine Linie mit Breite«, oder: »der Körper ist eine Fläche mit Dicke«, ist klar. Denn die Gegenstände Linie, Fläche und Körper sind ganz verschiedene Objecte; daher die Fläche nicht Linie, der Körper nicht Fläche und nicht Linie genannt werden kann.

5. Sieht man bei der Vorstellung »Fläche« von einer ihrer zwei Dehnungsrichtungen ab, dieselbe wegdenkend, so bleibt nur eine Dehnungsrichtung übrig, welche nothwendig eine Linie sein muß. Und denkt man sich umgekehrt zu einer Dehnungsrichtung eine zweite (in dem oben angegebenen Sinne) hinzu, so hat man in der Vorstellung die Fläche construirt. Obgleich, wie aus dem Gesagten erhellet, Fläche und Linie wechselseitig aus einander entstanden gedacht werden können, so bleiben sie dennoch wesentlich verschiedene Objecte.

6. Die Linie hat weder Breite noch Dicke.

7. Die Theile einer Linie liegen entweder alle in derselben Richtung, oder die Richtung der Theile ändert sich stetig fort und fort. Im ersten Falle ist die Linie eine gerade; im zweiten eine krumme. Dieses sind die beiden möglichen Arten einer Dehnungsrichtung. Es giebt daher nur gerade und krumme Linien.

8. Die Form oder Gestalt gerader Linien ist eine und dieselbe. In der Form können sie also nicht von einander verschieden sein, sondern nur in Hinsicht der Größe der Dehnungsrichtung, d. h. in Hinsicht ihrer Länge und in Hinsicht der Stellen im Raume, d. h. der Orte, wo sie sich befinden.

9. Nicht ganz so ist es bei krummen Linien; denn es giebt nur eine Art von Geradheit, aber sehr verschiedene (unzählig viele) Arten von Krümmung. Krumme Linien können daher verschieden sein rücksichtlich ihrer Orte, ihrer Längen und ihrer Gestalten.

10. Gerade Linien unterscheiden sich von krummen jederzeit durch ihre Form. Auch können sie von einander verschieden sein durch Ortsverhältniß und Größe der Ausdehnung.

11. Eine gerade Linie ist eine solche, deren Theile in derselben Richtung liegen; eine krumme Linie ist eine solche, deren Theile stetig fort in anderer Richtung liegen.

Jene Erklärung der geraden Linie ist keineswegs eine genügende Erklärung (Definition). Dazu würde erfordert, daß vorher »Richtung« erklärt sei. Aber was ist Richtung? Nichts anders als Geradheit, Ausdehnung in gerader Linie. Wir erklären also »Richtung« durch gerade Linie, und »gerade Linie« durch Richtung. Wir machen uns also des logischen Fehlers des »Cirkels im Erklären« schuldig. Dieß kommt daher, daß die Vorstellung »Linie« eine ganz einfache ist, indem sie

Digitized by Google

nur das Merkmal »Länge« hat. Logisch einfache Vorstellungen können aber nicht erklärt (genügend definirt) werden. Nichts desto weniger gewinnt die Vorstellung »Linie« leicht in jedes Menschen Bewußtsein hinreichende Klarheit. Das Bedürfniß einer logisch strengen Definition der geraden Linie fällt dadurch weg.

12. Im strengsten (mathematischen) Sinne unrichtig ist es daher, die krumme Linie aus vielen kleinen geraden Linien bestehend anzusehen. Denn kein Theil der krummen Linie, auch nicht der kleinste, ist gerade. Sollte daher diese Vorstellung in der Folge einmal gebraucht werden, so dürfen wir nicht vergessen, daß wir dadurch nicht vollständig die Wahrheit treffen, sondern nur uns derselben nähern, jedoch desto vollständiger und genauer, aus *je mehr* Theilchen, die als gerade betrachtet werden, wir die krumme Linie bestehend betrachten.

13. Richten wir unser Augenmerk auf die mögliche Verschiedenheit der Begränzung der Linien, so fällt es uns gleich ein, daß Linien begränzt oder nicht-begränzt vorgestellt werden können. Es giebt begränzte und nicht-begränzte Linien. Die begränzten Linien (Linien von endlicher Größe) sind entweder *in sich selbst* begränzt, oder nicht. Die nicht-begränzten Linien sind solche, die man sich über alle bestimmten und bestimmbaren Gränzen hinaus ausgedehnt denkt. Man nennt sie *unendlich große* Linien.

14. Eine nicht *in sich selbst* begränzte Linie kann nach zwei Seiten oder Richtungen (das Wort Richtung im weiteren Sinne genommen) verlängert, und nach zwei Seiten verkürzt gedacht werden. Faßt man beides zusammen, so gibt es möglicher Weise folgende Fälle:

Verlängerung nach einer Seite;
= = beiden Seiten;
Verkürzung an einer Seite;
= = beiden Seiten;
Verlängerung an einer und Verkürzung an der andern Seite.

15. Denke ich mir eine Linie frei im Raume liegen, so kann ich nach unzählig vielen Richtungen, von ihr aus, Breite hinzu denken; folglich kann dieselbe Linie die gemeinschaftliche Gränze unzählig vieler Flächen sein.

16. Diese Flächen kann ich auch über oder durch diese Linie verlängert denken. Durch dieselbe Linie können also unzählig (unendlich) viele Flächen gelegt gedacht werden.

17. Ebenso kann man in *eine* Fläche unendlich viele Linien gelegt denken.

18. Ich kann mir denken, daß eine gerade Linie mit einer geraden Linie zusammenfalle, so daß die eine in die andere zu liegen

Digitized by Google

kommt. Dasselbe kann bei krummen Linien statt finden. Nur müssen solche Linien dieselbe Art der Krümmung, dieselbe Form haben. Ist dieß nicht der Fall, so können sie auch nicht zusammenfallend gedacht werden. Da alle geraden Linien dieselbe Form haben, so kann ich jede zwei gerade Linien so gelegt denken, daß die eine in die Richtung der andern fällt. Die allgemeine Antwort auf die Frage ist also die: alle gleichgeformten Linien können zusammenfallend gedacht werden.

19. Fallen Linien zusammen, so liegen sie nicht auf, sondern in einander. Von körperlichen Dingen liegt allenfalls eins auf dem andern; wo aber das Körperliche fehlt, da findet bei der Berührung aller Theile zweier Gegenstände In-einander-fallen statt, so daß der eine ganz an derselben Stelle ist, wo der andere sich befindet. Durch das In-einander-fallen zweier Linien entsteht also weder eine Fläche, noch ein Körper, sondern nichts anders als eine Linie. Entstände durch das Zusammenfallen zweier oder mehrerer Linien eine Fläche, so käme dem Ganzen Breite zu, und dann müßte auch der einzelne Theil, also jede Linie, Breite haben, welches nicht ist. Entstände dadurch ein Körper, so bildeten zusammenfallende Linien Breite und Dicke, und folglich müßten auch die einzelnen Linien Breite und Dicke haben, welches nicht ist. Also kann durch das Zusammenfallen mehrerer Linien nichts anders entstehen, als eine Linie.

20 u. 21. Jede Linie kann ich in Theile getheilt denken, und jeden Theil kann ich abermals getheilt denken u. s. w., d. h. ich kann jede (auch die kleinste) Linie in unzählig oder unendlich viele Theile getheilt denken. Die Theilbarkeit der Linie geht bis in's Unendliche.

22. Folglich giebt es keine kleinsten Theile einer Linie, d. h. keine solchen, die nicht wieder getheilt gedacht werden könnten; eben so wenig, als es kleinste Theile einer Fläche oder eines Körpers giebt.

23. So wie also eine Linie in's Unendliche abnehmen kann, ohne deßwegen jemals Null werden zu müssen, eben so kann eine Linie bis über alle Gränzen hinaus, bis in's Unendliche, wachsend gedacht werden, ohne daß man deßhalb genöthigt wäre, dem vorgestellten Wachsthum Stillstand zu gebieten.

24. Die Gränzen, innerhalb welcher die Größe jeder Linie enthalten ist, sind also Null (gar keine Größe) und das Unendlich-Große.

25. Der Zusammenhang der Theile einer und derselben (geraden oder nicht-graden) Linie ist ohne alle Unterbrechung, also nicht diskret, sondern stetig. Wäre dieß anders, so wäre die Linie nicht bis in's Unendliche theilbar, sondern es gäbe kleinste Theile.

Digitized by Google

§. 4. Punkt.

1. Da, wo eine (nicht in sich selbst) begränzte Linie aufhört, denke ich mir ein raumloses Etwas, das nichts anders als die Stelle bezeichnet, wo die Linie aufhört. Dieses raumlose Etwas heiße Punkt.
2. Der Punkt ist also die Gränze der Linie.
3. Da jede, nicht in sich selbst begränzte Linie zwei Stellen hat, wo sie aufhört, so hat auch jede solche Linie zwei Gränzpunkte.
4. Zufolge Nro. 1. ist der Punkt etwas Raumloses; man kann sich daher so viele Punkte in jede Linie gelegt denken, als man will.
5. Gränzpunkte nennen wir die Punkte in so fern, als sie die Stellen angeben, wo Linien endigen. — Doch können wir den Punkt auch an und für sich betrachten, was zum Theil in dem Folgenden geschieht.
6. Dem Punkte als einem räumlichen Etwas kommt keine Dimension zu; er ist nichts Ausgedehntes.
7. Das Wort Punkt bezeichnet also nichts anders als eine Stelle im Raume.
8. Da, wo ein Punkt ist, oder da, wo ich mir einen Punkt denke, ist sein Wo, d. h. sein Ort. Der Punkt bezeichnet einen Ort, und es kommt ihm nichts anders zu als ein Ort.
9. Einfachere Dinge als der Punkt kann es unmöglich geben. Spricht man von ihm, so sagt man meist, was er nicht ist, und will man sagen, was er ist, so ist man fertig, sobald man gesagt hat: er bezeichne ein Ortsverhältniß. Man denkt sich den Punkt in den Raum, und doch nimmt er keinen Raum ein. Er ist ein ganz einfaches Gedankending.
10. Berührt ein Punkt einen andern, so sind beide nicht mehr von, sondern in einander; denn keiner hat Ausdehnung, also auch beide zusammen nicht. Dasselbe gilt von jeder Anzahl von Punkten.
11. Daraus folgt unmittelbar, daß ein Punkt nicht irgend ein Theil einer Linie sein könne. Die Linie hat Ausdehnung, also auch jeder, auch der kleinste Theil der Linie, die daher niemals ein Punkt sein oder werden kann. Durch fortgesetzt gedachte Theilung einer Linie kommt man also nicht bis zum Punkte. Er ist gewissermaßen die Gränze der Theilchen der immer fort und fort getheilten Linie, ohne daß doch irgend ein Theilchen diese Gränze erreichte.
12. Einen Punkt kann man von einem andern Punkte nur durch den Ort unterscheiden. Sie können, an verschiedenen Stellen im Raume sich befindend, gedacht werden.

Digitized by Google

15. 2 Größen: a und b.

a links, b rechts — und
b links, a rechts. Also 2 Veränderungen:

ab
ba . Anzahl = 1 . 2
= 2 .

3 Größen: a, b und c.

2 Größen geben die beiden Veränderungen ab u. ba. Kommt die dritte c hinzu, so kann sie in Beziehung auf ab die erste, zweite und dritte Stelle behaupten; dasselbe gilt in Bezug auf ba. Aus jeder der beiden vorhergehenden Veränderungen werden also nun 3 Veränderungen; überhaupt also 3mal so viel, als vorher da waren. Sie sind:

abc bac
acb bca
cab cba . Anzahl = 1 . 2 . 3
= 6.

4 Größen: a, b, c, d.

Nehmen wir zu einer der 6 vorhergehenden Veränderungen eine vierte Größe d, so kann dieselbe an die erste, zweite, dritte und vierte Stelle zu stehen kommen. Dasselbe ist der Fall, wenn ich sie mit jeder der 6 Veränderungen verbinde. Es entstehen also aus jeder der vorhergehenden 6 Veränderungen 4 Veränderungen. Um daher die ganze Anzahl der Veränderungen zu erhalten, muß die Anzahl der vorhergehenden Veränderungen, nämlich 6, mit 4 multiplicirt werden. Sie sind:

abcd acbd cabd bacd bcad cbad
abdc acdb cadb badc bcda cbda
adbc adcb cdab bdac bdca cdba
dabc dacb dcab dbac dbca dcba. Anzahl = 1.2.3.4
= 24.

5 u. s. w. bis n Größen.

Aus der bisherigen Auflösung geht hervor, daß, wenn eine fünfte Größe hinzutritt, aus jeder der vorhergehenden Veränderungen fünf werden; überhaupt, daß man nur die Anzahl der Veränderungen der vorhergehenden Anzahl mit der folgenden ganzen Zahl zu multipliciren braucht, um die Gesammt-Anzahl aller möglichen Veränderungen für diese Zahl zu finden.

Wir fanden die Anzahl dieser Veränderungen

für 2 Größen = 1. 2
„ 3 „ = 1. 2. 3
„ 4 „ = 1. 2. 3. 4
„ 5 „ = 1. 2. 3. 4. 5.

Digitized by Google

Sie ist für 6 Größen = 1. 2. 3. 4. 5. 6
= 10 = = 1. 2. . . . . 9. 10
= 12 = = 1. 2. 3. . . . . (n−1). n,

d. h. in Worten:

Um die möglich höchste Anzahl aller Stellungen einer gewissen Anzahl von Gegenständen in stets veränderter Ordnung zu finden, multiplicire man die natürliche Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis zu derjenigen (mit inbegriffenen) Zahl, welche die Zahl der gegebenen Gegenstände bezeichnet. Man nennt diese veränderten Stellungen auch Variationen.

14. Die Gränze des Körpers ist die Fläche;
= = der Fläche = = Linie;
= = = Linie = der Punkt.

Der Punkt hat gar keine Ausdehnung.
Die Linie hat eine Dehnungsrichtung: Länge;
= Fläche = 2 Dehnungsrichtungen: Länge und Breite;
Der Körper = 3 = : Länge, Breite u. Dicke.

15. Von diesen vier Grundobjecten der Raumlehre haben der Körper, die Fläche und die Linie Ausdehnung, der Punkt nicht; Gränzen irgend einer Ausdehnung sind die Fläche, die Linie und der Punkt. Da die Ausdehnung das Wesen dieser Körper ausmacht, so kann man sagen: sie sind Ausdehnung. Ausdehnung und Gränze der Ausdehnung zugleich sind also: die Fläche und die Linie. Der Körper hat oder ist Ausdehnung; aber er ist nicht die Gränze einer Ausdehnung; der Punkt dagegen ist die Gränze einer Ausdehnung; aber er hat selbst keine Ausdehnung.

16. Aus allem Bisherigen erhellet, daß die drei Objecte: Körper, Fläche und Linie Größen sind, und zwar Raumgrößen, d. h. solche, die im Raume existiren. Der Punkt aber ist nicht eine Größe und folglich auch keine Raumgröße. Er ist bloß die Gränze einer Raumgröße.

17. Es giebt also drei verschiedene Arten von Raumgrößen: Körper, Flächen und Linien.

18. Die Raumgröße mit 3 Dimensionen heißt Körper;
= = = 2 = = Fläche;
= = = 1 = = Linie.

§. 5. Fortsetzung und Erweiterung der Ansicht.

Anmerkung. Der Gang, welcher bis jetzt befolgt worden ist, wird jedem Leser klar geworden sein. Wir fingen mit der Betrachtung des Zusammengesetzten, nämlich mit dem Körper, an, weil der Schüler durch sinnliche Anschauung mit Körpern mancherlei Art bereits bekannt ist. Darum

Digitized by Google

mußten wir uns auf dem Standpunkte des Schülers niederlassen. Nach näherer Betrachtung des Körpers und des damit gegebenen Raumes gewannen wir (abstrahirend) durch logische Zergliederung (Analysis) den Begriff der Fläche und, diese logische Zergliederung fortsetzend, die Begriffe der Linie und des Punktes. Vom Zusammengesetzten, das aber für den Lernenden das Bekannteste und Einfachste war, ausgehend, gelangten wir zu stets Einfacherem, bis uns das Einfachste, der Punkt, nöthigte, Halt zu machen. Dieser Gang ist der naturgemäße, elementarische. Denn der Punkt stellt zwar das Einfachste, aber das dem Anfänger Unbekannteste auf; daher hier der pädagogische Grundsatz: „Schreite vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren fort!" dem anderen: „Gehe vom Bekannten zum Unbekannten über!" oder: „Reihe das Unbekannte an das Bekannte!" weichen mußte.

Alle aufgestellten Fragen und Aufgaben hatten hauptsächlich den Zweck, den Anfänger gleich von vorn herein von dem Standpunkte der sinnlichen äußern Anschauung, auf dem er sich befindet, zu der Stufe der innern oder geistigen Anschauung zu erheben. Obgleich die Wahrheit, daß die Mathematik es nur mit innern Anschauungen zu thun hat, selbst heut zu Tage noch von manchen Lehrern verkannt wird, so steht sie doch unwandelbar fest. Und welchen Vorzug hätte auch die Behandlung der Formenlehre oder der Geometrie in Schulen, wenn sie nicht in vorzüglichem Grade das innere Anschauungsvermögen bildete? Es heißt, sie herabwürdigen und sich der wesentlichen Bildekraft der Geometrie verlustig machen, wenn man das durch Naturgeschichte und die ganze äußere Welt reichlichst und vielseitigst zu erweckende äußere Anschauungsvermögen auch, der Natur des Gegenstandes widerstrebend, durch mathematischen Unterricht zu bilden sich bemüht. Wenn die äußere Natur dazu benutzt wird, des Schülers Anschauungsvermögen nach außen zu lenken, und wenn die Raumlehre benutzt wird, des Schülers inneres Anschauungsvermögen zu entwickeln und zu stärken, so ergänzen sich wechselseitig diese beiden wichtigen Unterrichtszweige. Die Beschauung äußerer Gegenstände soll in der Raumlehre nur dazu dienen, das Bewußtsein um die Grundobjecte der Raumlehre zur Klarheit zu erheben. Geometrische Wahrheiten wollen und sollen nicht gesehen, sondern gedacht werden. Um den Anfänger gleich auf den rechten Standpunct zu erheben, drücke man sich daher immer stets bestimmt und an innere Anschauung erinnernd aus; z. B.: Eine gerade Linie kann bis in's Unendliche verlängert gedacht werden — denke ich mir eine Linie in zwei Theile getheilt u. s. w., wie es in dem Vorstehenden meistens geschehen ist. Aus diesem Grunde habe ich es in den ersten Kapiteln vermieden, die besprochenen Objecte sinnlich zu bezeichnen. Der Anfänger soll erst den klaren Gedanken, die Sache, auffassen, und den Gedanken in Worte bringen, bevor ihm ein Zeichen oder Symbol gegeben wird. Dieses ist dann an der Zeit, wenn man sich versichert halten darf, daß er das Zeichen für das Zeichen nimmt, und nicht mehr Gefahr läuft, das Aeußere mit dem Innern zu verwechseln. Da ich glaube, daß dieses durch das Bisherige erstrebt ist, so gehe ich nun zur zweckmäßigen Bezeichnung der Objecte über, des Schülers Nachdenken dafür in Anspruch nehmend, diese Zeichen zu erfinden. Der jetzt zu behandelnde §. führt die Grundobjecte zugleich noch in einer Ordnung auf, welche der bisher beobachteten entgegengesetzt ist, damit die Ansicht sich noch mehr begründe; damit dem zergliedernden (analytischen) Lehrgange der verbindende (synthetische) sich anschließe. Es entsteht also nunmehr die Aufgabe, vom Einfachsten, dem Punkte, ausgehend, die übrigen Objecte in der Vorstellung zu construiren. Die zuerst aufgestellte Reihe derselben war: Körper, Fläche, Linie, Punkt; die nun folgende wird heißen: Punkt, Linie, Fläche, Körper. Beide Ansichten er-

Digitized by Google

gänzen einander und zeigen denselben Gegenstand aus den verschiedensten Gesichtspunkten.

Ich bin der Meinung, daß man überall im Unterrichte, wo es sich nur thun läßt, den synthetischen Lehrgang mit dem analytischen verbinden solle. Keiner von beiden ist vorzugsweise der elementarische; bald soll man mit dem Einen, bald mit dem Andern beginnen, gleich aber den umgekehrten Weg einschlagen. Mit nichten darf es der Willkühr überlassen werden, womit man anfangen, womit man endigen will. Denn das ist keineswegs gleichgültig. Der Standpunkt des Schülers bestimmt die zu treffende Wahl in höherem Grade, als der zu behandelnde Lehrgegenstand.

---

1. Da der Punkt keine Ausdehnung hat und folglich keinen Raum einnimmt, so kann das, was wir Punkt nennen, gar nicht gesehen werden; denn alles Sichtbare ist ein räumlich Ausgedehntes. Am zweckmäßigsten wird er durch eine möglichst kleine räumliche Ausdehnung bezeichnet. Zeichen des Punktes: (.). —

   Auch die Linie kann nicht so bezeichnet werden, daß das Zeichen vollkommen der Vorstellung entspricht. Am zweckmäßigsten wird, da die Linie eine Ausdehnung in die Länge ohne Breite ist, die Bezeichnung so gewählt, daß das Zeichen möglichst wenig Breite hat. Dieß ist der Fall bei dem sogenannten Striche (——), weßhalb man den Strich zum Zeichen der Linie gewählt hat. Zeichen der Linien sind gerade und krumme Striche: (——; ⌒; ∽). —

   Da, nicht in sich selbst begränzte Flächen durch Linien begränzt sind, so bezeichnet man Flächen dadurch, daß man auf der Fläche des Papiers oder einer Tafel mehrere verbundene Linien zieht. Das dazwischen Liegende, von ihnen Umschlossene, bezeichnet die Fläche. (△ ○ ⌓ u. s. w.)

   Oder man giebt in Worten an, daß man sich an dem Aeußern eines Körpers diese oder jene Fläche denken solle.

2. Das Zeichen des Punktes macht (den Punkt zeichnet) man mit spitzigen Gegenständen, z. B. mit den Spitzen der Federn, Griffel, Zirkelinstrumente; die geraden und krummen Linien entweder aus freier Hand, oder jene mit Hülfe des Linials, diese mit Zirkelinstrumenten u. s. w.

   Es kommt hierbei gar nicht darauf an, daß die gedachte gerade Linie auch wirklich dem Auge als ein vollkommen gerader Strich erscheine. Ich halte es im Gegentheile für gut, oft einen von dem Auge für krumm erkannten Strich als Bild einer geraden Linie hinzustellen, damit der Schüler stets genöthigt werde, Sache und Bild, Gedachtes und Sichtbares, von einander zu unterscheiden. Ich theile die Furcht jenes Pädagogen nicht, welcher meint, daß dadurch der Wahrheitssinn

Digitized by Google

der Schüler leide. Ist es denn überhaupt möglich, eine gerade Linie zu zeichnen? Auch der geradeste Strich ist nie eine gerade Linie; er bleibt das willkührliche, freilich passende, Zeichen der geraden Linie.

Man halte diese und die vorhergehenden Bemerkungen nicht für Pedanterei. Manche Lehrer und noch viel mehr Schüler verwechseln Sache und Zeichen, Laute mit Buchstaben, Zahlen mit Ziffern, Töne mit Noten, Begriffe mit Wörtern, Linien mit Strichen. Hier thut gründliche, oft wiederholte Unterscheidung wahrhaft Noth.

3. Hat das für einen Gegenstand gewählte Zeichen treffende Aehnlichkeit mit dem Gegenstande, den es bezeichnet; so nennt man das Zeichen ein Bild des Gegenstandes. Worte sind Zeichen der Begriffe, Gemälde sind oder sollen Bilder der Gegenstände sein, welche sie vorstellen. Auch der Strich kann ein Bild der Linie genannt werden. Aber man muß sich stets hüten, Zeichen oder Bild mit der Sache zu verwechseln.

4. Die sichtbare Linie (der Strich) ist jederzeit ein Körper; sie hat Länge, Breite und Dicke. Die gedachte Linie hat nur Länge.

5. Der bei unserer obigen Betrachtung zu Grund gelegte Gegenstand war der Körper. Durch ihn gelangten wir zum Begriff der Fläche; von der Fläche zum Begriff der Linie, von der Linie zum Punkte.

6. Wie ich, wenn ich eine Leiter hinauf gestiegen bin, auch wieder hinab steigen kann, so kann ich auch irgend eine Gedankenreihe umkehren, den letzten Gedanken an die Spitze stellen, und von ihm aus, in umgekehrter Reihenfolge, durch alle Mittelglieder hindurch, bis zum ersten zurück gehen.

7. Soll durch den Punkt in Gedanken eine Linie erzeugt werden, so muß, damit ein Außer-einander oder eine Ausdehnung entstehe, der Punkt in Gedanken von seiner Stelle gerückt oder in Bewegung gesetzt werden.

8. Der Weg eines bewegten Punktes ist jedesmal eine Linie.

9. Dieser Weg besteht entweder in einer geraden Linie oder in mehreren geraden, oder in einer krummen, oder in mehreren krummen, oder in geraden und krummen Linien. Bleibt die Richtung des Punktes, welche er im Augenblicke der entstehenden Bewegung hatte, dieselbe, so ist sein Weg eine gerade Linie (Fig. 1); ändert er auf seinem Wege die Richtung nur einmal oder mehrmals, jedoch jedesmal nach veränderter Richtung die eingeschlagene Richtung beibehaltend, so bewegt er sich in mehreren zusammenhängenden geraden Linien, oder in (ein- oder mehrfach) gebrochener Linie (Fig. 2). Aendert er vom Augenblicke der Bewegung an fort und fort

seine Richtung stetig, so ist der Weg des Punktes eine krumme Linie (Fig. 3); geschieht dieß von Zeit zu Zeit in Absätzen, so ist sein Weg aus krummen Linien zusammengesetzt (Fig. 4). Begreiflicherweise kann der durchlaufene Weg auch aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt sein (Fig. 5).

10. Unter vorstehender Nummer sind die verschiedenen Bahnen eines bewegten Punktes angegeben. Daß die krummlinige Bahn entweder regelmäßig, oder unregelmäßig krumm, beides auf mehrfache Weise, sein könne, versteht sich von selbst.

11. Auch Linien kann ich in Gedanken in Bewegung setzen; sowohl die geraden, als die krummen. Die bewegten Linien gehen nun entweder in der Richtung, die sie haben, fort, so daß der ganze entstehende Weg der ursprünglichen Form der Linie gleichet (wo dieß überhaupt möglich ist), oder sie bewegen sich in andern Richtungen, seitwärts.

Der Weg einer geraden Linie ist entweder auch eine gerade Linie, in welchem Falle die durchlaufene Bahn derselben die Verlängerung der ursprünglichen Linie bildet (Fig. 6), oder der Weg, den sie in seitwärts gerichteter Bewegung zurücklegt, ist eine Fläche. Eine krumme Linie erzeugt durch ihre Bewegung entweder eine, die ursprüngliche krumme Linie verlängernde, krumme Linie (Fig. 7), oder eine Fläche. Bewegte Linien im Allgemeinen beschreiben also entweder Linien oder Flächen.

12. Flächen kann man sich demnach als Erzeugnisse bewegter Linien denken. Ebene Flächen können sowohl durch die Bewegung gerader, wie durch die Bewegung krummer Linien entstehen. Denke ich mir z. B. die in der Ebene der Schultafel liegenden geraden oder krummen Linien in der Ebene der Schultafel seitwärts fortrückend, so gehen sie in einer Ebene fort. Auch können durch bewegte gerade und krumme Linien krumme Flächen entstanden gedacht werden. Deutlich wird dieses, wenn ich mir z. B. vorstelle, daß eine gerade Linie auf der Oberfläche einer Walze herumrücke, und daß eine krumme Linie sich um eine gerade Linie herumschwinge.

13. In diesem Falle muß ich die erste Linie auf der zweiten so bewegt denken, daß jeder Punkt der ersten eine gerade Linie zurücklegt.

14. Unter Nummer 12 ist es schon auseinander gesetzt, daß eine krumme Fläche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden könne. Freilich wird dieß keine Kugelfläche sein, weil ich eine gerade Linie nicht in eine Kugelfläche gelegt denken kann. Jederzeit ist dieß eine solche krumme Fläche, die nach gewissen Richtungen so gestaltet ist, daß gerade Linien in sie

Digitized by Google

hineinfallen können, z. B. die Oberfläche der Walze und des Kegels.

15 u. 16. Diese Fragen sind unter Nummer 12 bejaht und die Richtigkeit ist daselbst nachgewiesen worden.

17. Denke ich mir eine ebene Fläche in Bewegung gesetzt, so geschieht dieß entweder in ihrer Richtung, oder nicht in ihrer Richtung. In jenem Falle ist der Weg, den sie zurücklegt, eine Fortsetzung ihrer Lage, also eine Ebene, welche die Verlängerung der ursprünglichen Ebene bildet; in diesem Falle bildet der Weg der Ebene einen körperlichen Raum.

Denke ich mir eine krumme Fläche gehörig gestaltet, z. B. einen Theil der Kugeloberfläche, und dieselbe so fortbewegt, daß ihr Weg die Fortsetzung ihrer ursprünglichen Lage ist, so beschreibt sie eine (krumme) Fläche. Bewegt sie sich aber nicht in ihrer ursprünglichen Richtung, so durchwandert sie einen körperlichen Raum.

18. Ein Körper ist ein nach drei Richtungen ausgedehntes räumliches Ding; darum muß auch der Raum, den er erfüllt, nach drei Dimensionen ausgedehnt sein.

19. Das Produkt der Bewegung a) eines Punktes (d. h. die Linie) hat zufolge des Früheren stets eine Dehnungsrichtung; b) einer geraden Linie (d. h. die gerade Linie oder die Fläche) 1 oder 2; c) einer krummen Linie (d. h. die krumme Linie oder die Fläche) auch 1 oder 2; d) einer ebenen Fläche (d. h. die ebene Fläche oder der Körper) 2 oder 3; e) einer krummen Fläche (d. h. die krumme Fläche oder der Körper) auch 2 oder 3; f) eines Körpers (d. h. der Körper) jederzeit 3 Dehnungsrichtungen.

20. Wenn ein Punkt eine gerade Linie beschreibt, so ändert er seine anfängliche Richtung nie, weil er dieselbe ununterbrochen beibehält; beschreibt er aber eine krumme Linie, so ändert er seine Richtung ununterbrochen oder stetig.

21. Unter »Entfernung« versteht man entweder die Größe der geraden Linie zwischen zweien Gegenständen oder Punkten, oder (factitiv) das Wachsthum dieser geraden Linie; unter »Annäherung« aber die Verkleinerung derselben. »Weite« heißt entweder die Größe der Entfernung zweier Gegenstände oder auch die verhältnißmäßig beträchtliche Größe derselben; unter »Nähe« versteht man die unbeträchtliche Größe der Entfernung. Fallen zwei Gegenstände mit ihren Enden zusammen, so findet bei ihnen Angränzung oder Berührung statt; »Zwischenraum« heißt die Strecke, welche zwischen zwei getrennten Gegenständen liegt.

22. Schon im dritten §., Nummer 11, ist das Erforderliche über die Definition der geraden Linien gesagt.

Digitized by Google

Da die gerade Linie nach einer, die krumme Linie und die Fläche nach vielen, der Körper nach allen Richtungen ausgedehnt ist, so kann das erste die Einheit, das zweite die Vielheit, das dritte die Allheit der Ausdehnung genannt werden.

23. Diese Frage ist zum Theil schon §. 2 Nro. 14, §. 3 Nro. 8, §. 4 Nro. 12 aufgestellt und beantwortet worden. Hier soll die Sache unter einen Gesichtspunkt gebracht werden. —

Alle Punkte sind einander gleich; einer ist ganz, was der andere ist; verschieden können sie nur in Hinsicht ihrer Orte, ihres Wo sein.

Gerade Linien kommen darin überein, daß alle Punkte einer jeden in einer Richtung liegen. Verschiedenheit findet unter geraden Linien statt in Hinsicht der Lage (des Ortes) und der Größe.

Ebene Flächen sind darin einander ähnlich, daß jede gerade Linie, welche beliebige zwei Punkte der Ebene verbindet, mit allen ihren Theilen in die Ebene fällt; verschieden können sie sein in Hinsicht auf Lage (Ort) Größe und Begränzung.

Krumme Flächen kommen darin mit einander überein, daß sich gerade Linien entweder nach keiner Richtung, oder wenigstens nicht nach allen Richtungen in sie hinein gelegt denken lassen; Verschiedenheit kann zwischen ihnen statt finden in Hinsicht der Art der Krümmung, der Lage, der Größe und der Begränzung.

Körper sind darin einander ähnlich, daß sie nach allen drei einander entgegengesetzten Richtungen ausgedehnt oder Raum erfüllend sind; unter einander verschieden können sie sein in Hinsicht der Orte, Größe und Begränzung.

Anmerkung. In §. 5 kommen einige Gegenstände vor, von welchen schon früher die Rede war. Also billigt und verlangt es der gründliche Unterricht. Nur durch Wiederauffassung früherer Ansichten ꝛc. bringt man dem Schüler einfache und darum nicht selten schwere Dinge zur Klarheit, besonders wenn dieselben bei der wiederkehrenden Betrachtung unter neuen Gesichtspunkten aufgefaßt werden.

§. 6. Bewegung.

1. Bewegung ist Ortsveränderung.

2. Die Vorstellung »Bewegung« ist offenbar nicht ganz einfach. Wenn Bewegung = Ortsveränderung, so liegen einmal in dem Begriffe »Bewegung« die Merkmale Veränderung und Ort, und Ort ist das Wo eines Gegenstandes im Raume. Sobald ein Gegenstand, z. B. ein Punkt, bewegt gedacht

Digitized by Google

wird, so nimmt er eine gewisse Richtung; die Bewegung fängt irgendwo an; sie hat einen Anfangspunkt und, wenn sie nicht eine unendliche ist, auch einen Endpunkt. Zwischen Anfangs- und Endpunkt liegt der Weg des bewegten Dinges, und während dasselbe diesen Weg zurücklegte, ist Zeit verflossen. Vergleiche ich diese Zeit mit der Größe des Weges, welchen der Gegenstand in dieser Zeit zurücklegte, so entsteht daraus die Vorstellung, wie schnell oder langsam die Bewegung gewesen ist, also die Vorstellung von »Geschwindigkeit.«

5. Dem Begriffe Bewegung liegen folgende Vorstellungen zu Grunde: Anfangspunkt oder Ort des Anfanges der Bewegung — Richtung — Größe des zurückgelegten Weges — Zeit — Geschwindigkeit.

4. u. 5. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist entweder eine gleichmäßige, oder eine ungleichmäßige. Jenes, wenn in gleichen, auf einander folgenden, Zeittheilchen gleiche, dieses, wenn in gleichen Zeittheilchen ungleiche (ungleich große) Räume (oder Linien) zurückgelegt werden. Die Zeiger einer regelmäßig gehenden Uhr haben eine gleichmäßige, ein fallender Stein hat eine ungleichmäßige Geschwindigkeit.

6. Wird ein Punkt bewegt gedacht, so kann seine Bewegung verschieden sein: in Ansehung der Geschwindigkeit, der Form des zurückgelegten Weges und der Länge. Die Geschwindigkeit ist entweder gleichmäßig, oder ungleichmäßig; die Form des zurückgelegten Weges entweder eine gerade, oder eine krumme Linie; die Länge des Weges entweder groß, oder klein.

7. Ist die Bewegung ungleichmäßig, d. h. bewegt sich der Punkt in gleichen Zeittheilchen durch ungleiche (Längen-) Räume, oder in ungleichen Zeittheilchen durch gleiche Räume, so ist die Bewegung entweder beschleunigt oder verlangsamt (verzögert). Beschleunigt ist sie, wenn in jedem folgenden gleichen Zeittheilchen ein größerer Raum zurückgelegt wird, als in dem vorhergehenden Zeittheilchen; verzögert aber, wenn in jedem folgenden gleichen Zeittheilchen ein kleinerer Raum zurückgelegt wird, als in dem vorhergehenden Zeittheilchen.

8. Gleichmäßig beschleunigt heißt die Bewegung, wenn die Räume in den gleichen auf einander folgenden Zeittheilchen um gleich viel wachsen; ungleichmäßig beschleunigt, wenn sie nicht um gleich viel wachsen. Nehmen die Räume in den gleichen Zeittheilchen stets um gleich viel ab, so ist die Bewegung gleichmäßig verzögert, im entgegengesetzten Falle ungleichmäßig verzögert.

9. Drehend ist die Bewegung desjenigen Körpers, dessen Theile sich um einen Punkt in seinem Innern herumschwingen; fortschreitend, wenn alle Theile des Körpers ihre Stelle verlassen; drehend-fortschreitend, wenn nicht nur alle

Digitized by Google

Theile des Körpers ihre Stelle verlassen, sondern dieselben sich zugleich um einen Punkt im Innern des Körpers herumschwingen; zurückkehrend, wenn der bewegte Körper wieder an die Stelle im Raume kommt, wo er schon einmal gewesen ist. Letzteres kann auf zwei Arten geschehen, indem der Körper entweder in geraden Linien hin und her geht, oder indem er eine krummlinige, in sich geschlossene Bahn beschreibt. Jene Bewegung heißt die schwingende, diese die rundlaufende, zirkulirende oder rotirende. — Einfach heißt die Bewegung dann, wenn nur eine Kraft dieselbe hervorbrachte; zusammengesetzt, wenn mehrere Kräfte in verschiedenen Richtungen zugleich auf den bewegten Körper wirkten.

Beispiele. Die Planeten (z. B. unsere Erde) bewegen sich um ihre Achse; sie haben also eine drehende Bewegung. Doch bleiben sie nicht auf derselben Stelle, sondern sie bewegen sich zugleich um die Sonne. Ihre Bewegung ist also zugleich fortschreitend, drehend-fortschreitend, und, weil sie sich in (in sich) geschlossenen Bahnen bewegen, zugleich zurückkehrend und zwar zirkulirend. Die zurückkehrende, schwingende Bewegung wird an Pendeln und angeschlagenen Saiten beobachtet.

Auf die Billard- und Kegelkugel wirkt nur eine Kraft; die Bewegung ist also hier einfach. Auf die Planeten wirken fort und fort zwei Kräfte: Beharrungskraft und die Anziehungskraft der Sonne; die Bewegung ist also zusammengesetzt.

Anmerkung. Mehrere der vorstehenden Bemerkungen gehören eigentlich nicht in die Raumlehre, sondern in die Physik. Da hier aber nicht von einem streng wissenschaftlichen Lehrgebäude, sondern von elementarischer Bildung die Rede ist, so brauchen wir hier nicht so zu scheiden, wie die strenge Wissenschaft es verlangt. Das Leben thut es auch nicht.

§. 7. Zeit.

1. »Zeit« ist eine ganz einfache Vorstellung, wie die Vorstellung »Raum.« Mit dieser hat sie auch das Gemeinschaftliche, daß sie zu den Grundvorstellungen unseres Anschauungsvermögens gehört. Alles, was wir uns in der Natur befindlich vorstellen, stellen wir uns im Raume und zugleich, da wir ihm eine gewisse Dauer verleihen, in der Zeit vor. Seelenzustände, die Seele selbst und alles Geistige gehören nicht mehr dem Raume, aber doch der Zeit an. Raum und Zeit sind Grundformen unseres Anschauungsvermögens für äußere leibliche Dinge; die Zeit ist zugleich die Grundform des Anschauungsvermögens

Digitized by Google

für innere geistige Dinge. Raum ist Außer-einander-sein, Zeit ist Nach-einander-sein.

2. Ein passendes Bild der Zeit ist die Linie. Wie alle Punkte der Linie außer einander liegen; wie die Linie von Punkt zu Punkt fortschreitet; wie die Theile derselben einen stetigen Zusammenhang haben: so liegen die Theile der Zeit außer einander; so schreitet die Zeit von Augenblick zu Augenblick ohne alle Unterbrechung fort.

3. Gleich der Linie hat die Zeit nur eine Ausdehnung, nämlich Länge.

4 u. 5. Früher als »jetzt« war das Vergangene, später als »jetzt« wird das Zukünftige sein.

6. Der Fortschritt der Zeit ist regelmäßig, gleichförmig, immer derselbe ohne alle Aenderung. Schicksale, Lebensverhältnisse, Art der Beschäftigung, Wünsche, Hoffnungen, Furcht u. s. w. bewirken es, daß uns der gleichmäßige Fortschritt der Zeit bald langsamer, bald schneller erscheint.

7. Vergleiche ich den Raum mit der Zeit, so finde ich: Beide sind allen Anschauungen zu Grund liegende, durch Erfahrung entwickelte und klar gewordene, nicht aber aus der Erfahrung hergenommene, sondern gewißermassen angeborene, dem Wesen unseres Geistes angehörige Vorstellungen. Raum und Zeit werden als unendliche Größen vorgestellt. Beide sind bis in's Unendliche theilbar. Es giebt weder einen kleinsten Theil des Raumes, noch einen kleinsten Theil der Zeit. Die Theile beider hangen stetig zusammen.

Alles, was existirt, wird als in der Zeit existirend vom Menschen vorgestellt. Der Mensch hat keine Vorstellung von einem Leben oder Sein außer der Zeit. Alles, der äußern Welt Angehörige ist zugleich im Raume. Wir stellen uns die Zeit unter einer Ausdehnung, den Raum unter drei Ausdehnungen vor. Beide haben die Länge mit einander gemein.

8. Der Breite des Raumes entspricht das Zugleich-sein vieler Dinge in derselben Zeit.

9. Erfüllt wird die Zeit durch Alles, was in der Natur und vom Menschen geschieht. Das Geschehende in der Zeit entspricht also der Dicke des Raumes.

10. Wie schon gesagt, ist der Zusammenhang der Theile des Raumes und der Zeit stetig.

11. Weil die Zeit bis in's Unendliche theilbar gedacht wird und gedacht werden muß, so kann ich mir kein kleinstes Zeittheilchen, kein Atom der Zeit vorstellen, welches nicht wieder in der Vorstellung getheilt werden könnte.

12. Der Begriff »Geschwindigkeit« wird nur dadurch gewonnen,

Digitized by Google

daß ich die zur Bewegung verbrauchten Zeittheile eines Körpers mit der Länge des Weges, den er in dieser Zeit zurückgelegt hat, vergleiche. Geschwindigkeit bleibt daher stets etwas Relatives, und klar wird mir der Begriff nur, wenn ich die Wege zweier Körper, welche sie in derselben Zeiteinheit zurückgelegt haben, mit einander vergleiche.

13, 14 u. 15. Kenne ich bloß die Größe des Weges, den ein Körper durchlaufen hat, so kann ich noch nicht von seiner Geschwindigkeit sprechen. Eben so wenig, wenn mir bloß die Zeit seiner Bewegung genannt ist. Sind mir aber beide bekannt, so kann ich den Weg bestimmen, den er in einer (anzunehmenden) Zeiteinheit zurückgelegt hat, d. h. seine Geschwindigkeit.

16. Alle, sowohl äußere als innere Dinge werden als in der Zeit existirend vorgestellt.

17. Die Dinge im Raume werden als außer, die Dinge in der Zeit als mit und nach einander vorgestellt. Zugleich-seiende Dinge sind mit einander in der Zeit; die Zustände eines und desselben Dinges sind nach einander in der Zeit.

18. Menschen sind unvermögend, zu bestimmen, ob die Anzahl der im Raume befindlichen Dinge unendlich groß ist. Gewöhnlich stellt man sich die Reihe der neben einander liegenden Dinge im Raume als unvollendbar vor. Der Weltraum selbst muß zufolge der Einrichtung unseres Vorstellungsvermögens als unbegränzt, als unendlich vorgestellt werden.

19. Eben so wenig kann sich der Mensch das Anschauen der Zeit vorstellen. Um dieß zu vermögen, müßte man sich eine Zeit ohne Zeit vorstellen können. Ob es eine Zeit oder ein Sein geben wird, wo kein leibliches Ding mehr sein wird, weiß der Sterbliche nicht. Immer aber wird es dann nicht nur Denkbares, sondern Wirkliches, nämlich Geistiges geben. Es giebt also kein letztes denkbares Ding.

20. Den zugleich im Raume und in der Zeit befindlichen Reihen der Dinge scheint Unendlichkeit beigelegt werden zu müssen.

21. Diese Reihen sind demnach unvollendbar. Immer aber werden sie als der Zeit angehörige Dinge vorgestellt. Und da Zeit der Gegensatz ist von Ewigkeit, die im engeren Sinne des Wortes auch die Unendlichkeit heißt, so gehören alle in Raum und Zeit befindlichen Dinge der Endlichkeit an, welcher Vorstellung die Idee der Ewigkeit gegenüber steht.

22. Aller irdischen Dinge »Wo« und »Wann« läßt sich bestimmen; über das »Wo« und »Wann« der ewigen Dinge läßt sich nichts bestimmen, da diese weder dem Raume, noch der Zeit angehören.

23. Zwischenzeit ist die Zeit, welche innerhalb zweier Zustände ver-

Digitized by Google

fließt; Zeitraum ist ein Theil der Zeit, welcher zwischen zwei Gränzpunkten (gewöhnlich, bedeutenden Thatsachen) eingeschlossen gedacht wird. Zeitumlauf ist ein Theil der Zeit, welcher als wiederkehrend (wie z. B. das Jahr) betrachtet wird; Zeitabschnitt ist jeder Theil der Zeit, wenn dieselbe zum Behuf der Gedankenordnung eingetheilt wird; Zugleichsein ist bei den Dingen, welche in einer Zeit leben; Aufeinanderfolge findet statt, wenn das Eine früher ist, als das Andere; jenes geht vorher, dieses folgt nach u. s. w.

§. 8. Richtung und Lage.

1. Man befestige einen etwas schweren Körper an einen Faden, lasse denselben frei zur Erde herab hängen und beobachte die Richtung des Fadens.
2. In gleicher Richtung mit dem Faden stehen die vier Seitenwände dieses Zimmers.
3. »Loth« oder »Bleiloth« nennen die Maurer und Zimmerleute eine Schnur, an welcher ein Stück Blei befestigt ist und mit welcher sie die senkrechte Lage der Wände prüfen.

4 u. 5. Diejenige Richtung ist der lothrechten gerade entgegengesetzt, welche nicht von oben nach unten, sondern von der rechten zur linken Hand so liegt, wie die Ebene des Fußbodens und die Ebene der Zimmerdecke.

6 u. 7. Die Oberfläche des stillstehenden Wassers liegt in letzterer Richtung, in der Richtung des Gesichtskreises des Horizontes.

8 u. 9. Ist eine Wage gut verfertigt, so sind die auf beide Wagschalen drückenden Gewichte im Gleichgewichte; wenn der Wagbalken in der wasserrechten Richtung liegt, welches der Fall ist, wenn die Zunge »einspielt.«

10. Gut gewachsene Menschen und Bäume haben eine senkrechte Richtung; auch die Bäume, welche auf der schiefen Fläche oder dem Abhange eines Berges wachsen. Ihre Richtung ist die lothrechte, wie die Richtung der auf horizontalen Ebenen wachsenden Bäume.
11. Die vier Wände dieses Zimmers stehen in senkrechter, die Fuß- und Bodendecke liegen in horizontaler Richtung.
12. Ein frei hängendes Bleiloth steht senkrecht auf einer geraden Linie, welche die Richtung des stillstehenden Wassers hat, d. h. auf einer Horizontallinie.
13. Und umgekehrt steht jede horizontale Linie auf, der mit ihr verbundenen lothrechten Linie senkrecht.

Digitized by Google

14. Jede durch eine lothrechte Linie gelegt gedachte Ebene hat dieselbe Richtung, von oben nach unten, welche die lothrechte Linie hat.

15. Diese lothrechte Ebene steht auf der horizontalen Wasserebene senkrecht.

16. Dieß wird anschaulich gemacht durch jede Seitenwand einer senkrecht stehenden Mauer, durch die Seitenwände gut gebauter Häuser ꝛc.

17 u. 18. Um mit der Vorstellung zu beginnen, welche der Schüler gewöhnlich schon mit den Ausdrücken »Loth,« »wagerecht« ꝛc. verbindet, wurde der Begriff der senkrechten und lothrechten Lage in den früheren Fragen und Antworten zu enge gefaßt. In der unter Nro. 17 stehenden Bemerkung ist nun dieser Begriff genau aufgestellt, und da daraus hervorgeht, daß der Begriff der senkrechten Lage ein relativer (gegenseitig bezüglicher) Begriff ist, so muß der Lehrer es nicht zugeben, daß irgend eine Linie »senkrecht« genannt werde, ohne die Angabe zu verlangen, auf welcher Linie die senkrecht genannte Linie senkrecht gedacht werde. Eine gerade Linie, für sich betrachtet, ist nie senkrecht; senkrecht oder lothrecht steht sie nur in Bezug auf eine andere gerade Linie, nämlich dann, wenn sie gegen deren beide Seiten, von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte aus, dieselbe Lage hat.

19. Die Begriffe »Ort,« »Lage« und »Richtung« sind relative Begriffe. Existirt nur ein Punkt im Raume, oder denke ich mir nur einen Punkt in demselben; so kann ich seinen Ort oder seine Lage gar nicht bestimmen. Es kann dieß nur geschehen in Bezug auf einen zweiten Punkt oder Ort, dessen Lage ich als bekannt annehme. Will ich z. B. den Ort der Tafel dieses Zimmers angeben, so sage ich: sie hängt an der, der Thüre gegenüber stehenden Wand zwischen den beiden Fenstern, wobei ich voraussetze, daß demjenigen, zu welchem ich dieses sage, die Lage der Thüre und der Fenster bekannt sei.

20. Denke ich mir drei, in demselben Punkte sich durchkreuzende, senkrecht auf einander stehende gerade Linien, so steht jede dieser drei Linien in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte auf den beiden andern senkrecht.

21. Auch kann ich jede dieser drei Linien als zwei ansehen, welche dieselbe gerade Linie bilden, deren Theile aber von dem Durchschnittspunkte aus nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind. Obige Verbindung giebt mir alsdann sechs Richtungen.

22. Bei der Angabe dieser sechs Richtungen mit der Hand muß der Punkt bestimmt werden, von welchem man die Linien ausgehend denken soll.

Digitized by Google

23. Denkst du dir die eine dieser sechs Richtungen horizontal vorwärts, so heißen die übrigen Richtungen: horizontal rückwärts — horizontal rechts — horizontal links — senkrecht aufwärts — senkrecht abwärts. Die Richtungen vorwärts und rückwärts, rechts und links, aufwärts und abwärts sind einander entgegengesetzt.

24. Denke ich mir durch jede vier dieser Strahlen, welche in derselben Ebene liegend gedacht werden können, eine Ebene gelegt, so erhalte ich drei Ebenen.

25. Jede dieser Ebenen geht durch vier Strahlen, und zwar die erste durch die Richtungen: vorwärts, rückwärts, aufwärts, abwärts; die zweite durch: rechts, links, aufwärts, abwärts; die dritte durch: vorwärts, rückwärts, rechts und links.

26. Eine dieser Ebenen hat gleiche Lage mit der Wasserfläche; die beiden andern stehen senkrecht auf derselben. In diesem Sinne sprechen wir hier von einer horizontalen und von zwei senkrechten Ebenen. Die zweite senkrechte geht durch aufwärts, abwärts, rechts und links; die horizontale durch vorwärts, rückwärts, rechts und links.

27. Die in der horizontalen Ebene, von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte aus, noch zu ziehenden vier Zwischenrichtungen heißen: vorwärts rechts, rückwärts rechts, rückwärts links, vorwärts links.

28. Die in der ersten senkrechten Ebene noch zu ziehenden vier Zwischenrichtungen sind: vorwärts aufwärts, vorwärts abwärts, rückwärts abwärts, rückwärts aufwärts. In der zweiten senkrechten: rechts aufwärts, rechts abwärts, links abwärts, links aufwärts. Vorhanden sind nun in jeder der drei Ebenen vier Haupt- und vier Zwischenrichtungen. — Hieraus sollte man schließen, daß also überhaupt dreimal vier Haupt- und dreimal vier Zwischenrichtungen vorhanden seien. Aber jede der Hauptrichtungen gehört zweien Ebenen hat; es giebt daher statt 12 nur 6 Haupt- und 12 Zwischenrichtungen.

29. Paarweise einander entgegengesetzte Zwischenrichtungen sind: vorwärts aufwärts und rückwärts abwärts; vorwärts abwärts und rückwärts aufwärts; rechts aufwärts und links abwärts; rechts abwärts und links aufwärts; rechts vorwärts und links rückwärts; rechts rückwärts und links vorwärts. — Die Richtigkeit läßt sich, ohne an die Richtungen selbst zu denken, schon aus den sprachlichen Ausdrücken, aus den Wörtern, ermessen.

30 u. 31. Ohne Verwirrung können diese Haupt- und Zwischenrichtungen nicht auf dieselbe Ebene (Schultafel) gezeichnet werden, weil sie nicht derselben Ebene angehören. Man lasse daher diese Richtungen mit der Hand angeben!

Digitized by Google

32. Natürlicher Weise kann ich fort und fort zwischen je zwei neben einander liegenden Richtungen abermals eine neue Richtung annehmen, stets von dem gemeinschaftlichen Durchgangspunkte ausgehend. Jede würde ihren Namen hernehmen von den benachbarten Richtungen. Die z. B. zwischen den Richtungen vorwärts und vorwärts-rechts liegende Richtung würde heißen: vorwärts-vorwärtsrechts oder vorwärts-rechtsvorwärts. Dann: vorwärtsrechts-rechts, rechts-rückwärtsrechts u. s. w. Auf diese Weise konnte man in jede Ebene 8 neue Richtungen legen und sie Zwischen-Zwischenrichtungen oder Neben-Nebenrichtungen oder Neben-Zwischenrichtungen nennen. Die so aufgestellte Verbindung würde überhaupt enthalten: 6 Haupt-, 12 Zwischen- und 24 Neben-Zwischenrichtungen.

33. Von meinem Standpunkte aus liegen die Gegenstände dieses Zimmers also: Dieser Tisch liegt (steht) von mir aus vorwärts, dieser Stuhl rückwärts, jenes Fenster vorwärtsrechts, der Ofen linksrückwärts, jene Landkarte vorwärtsrechtsaufwärts, jene Ecke rückwärtslinksabwärts u. s. w.

34. Zur anschaulichen Bezeichnung der bisher betrachteten 3 Ebenen füge man 3 in Papier oder Pappendeckel ausgeschnittene gleiche Kreisflächen zusammen, daß jede auf der andern senkrecht zu stehen scheint. Man wird in einige Kreisscheiben Einschnitte zu machen sich genöthigt sehen.

35. Giebt man den in der obigen Horizontalebene gezogenen Richtungen die Namen Nord, Süd u. s. w., so erhält man die Windrose. Die 4 Hauptrichtungen bestimmen die 4 Haupt-Weltgegenden Nord, Süd, Ost und West; die 4 Zwischenrichtungen bestimmen die 4 Neben-Weltgegenden Nord-Ost, Süd-Ost, Nord-West und Süd-West. Zwischen diesen liegen: Nord-Nordwest, Ost-Nordost u. s. w. Und zwischen diesen: Nord-Nordnordost (oder wie die Schiffer sie nennen: Nordnordost gen Nord), Nordnordost-Nordost u. s. w.

36. Siehe Fig. 8.!

37. Es sind 6 horizontale und 5 senkrechte Reihen vorhanden.

38. Der Punkt a z. B. ist der zweite Punkt in der dritten horizontalen und der dritte Punkt der zweiten senkrechten Reihe; der Punkt b ist der vierte Punkt in der vierten horizontalen und der vierte Punkt in der vierten senkrechten Reihe u. s. w.

39, 40 u. 41. sind für sich klar.

Digitized by Google

§. 9. Punkt und Linie.

1. Der mathematische (zum Unterschiede vom physischen, räumlich ausgedehnten) Punkt bezeichnet irgend eine Stelle im Raume und wird als Gränze der Linie gedacht.
2. Der kürzeste Weg zwischen zweien Punkten ist die gerade Linie zwischen ihnen.
3. Durch einen Punkt kann ich mir unendlich viele gerade Linien gelegt vorstellen. Durch zwei von einander getrennte Punkte ist nur eine gerade Linie möglich.
4. Die Lage einer geraden Linie wird also durch zwei Punkte bestimmt.
5. Unter der »Entfernung« zweier Punkte versteht man die gerade Linie zwischen beiden.
6. Darum wird diese Entfernung durch diese gerade g. L. gemessen.
7. Da nicht nur durch einen, sondern auch noch durch zwei Punkte unzählig viele krumme Linien möglich sind, so wird auch weder durch einen, noch durch zwei Punkte die Lage einer krummen Linie bestimmt.
8. Zwischen 3 Punkten sind höchstens 3 g. L. möglich. Liegen diese 3 Punkte in derselben g. L., so ist zwischen ihnen also nur eine g. L. möglich. Denkt man sich aber die Verbindung je zweier Punkte als eine g. L., so sind auch diese 3 Punkte durch 3 g. L. zu verbinden, obgleich diese g. L. in eine g. L. fallen.

9. u. 10. Um die höchste Anzahl gerader Linien zu finden, welche zwischen einer gegebenen Zahl von Punkten möglich sind, überlege ich, daß jeder Punkt mit jedem andern durch eine g. L. verbunden werden kann. Sind der Punkte z. B. 6, so kann ich von jedem Punkte nach den 5 andern Punkten g. L. ziehen, also von jedem Punkte aus 5 Linien. Von 6 Punkten 6.5 L. Da aber jede dieser Linien 2 Punkte verbindet, indem z. B. die Linie, welche den ersten Punkt mit dem zweiten verbindet, dieselbe ist, welche den zweiten mit dem ersten verknüpft; so drückt das Produkt 6.5 die doppelte Anzahl der möglichen g. L. aus. Wenn ich daher dieses Produkt 6.5 durch 2 theile; so habe ich die gesuchte Anzahl g. L., und es sind also zwischen 6 Punkten $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ g. L. möglich. — Ganz aus den nämlichen Gründen ist die höchste Zahl der geraden Linien zwischen

10 Punkten $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

20 Punkten $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

100 Punkten $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950.$

Um diese Aufgabe allgemein, d. h. für jede ganze Zahl n aufzulösen, bedenke ich nur, daß von jedem dieser n Punkte (n — 1) g. L. nach den übrigen (n — 1) Punkten gezogen werden können; von zweien dieser Punkte gehen also aus 2mal (n — 1) g. L., und von n Punkten n. (n — 1) g. L. Aus dem schon angeführten Grunde ist aber dieses Produkt das Doppelte der möglichen g. L. Die wirkliche Anzahl derselben ist daher = n. $\frac{(n-1)}{2}$. Drücke ich diese Formel, welche das Gesetz für die möglich höchste Anzahl gerader Linien zwischen irgend einer gegebenen Anzahl von Punkten ausspricht, in Worten aus, so heißt dieß so:

Um die möglich höchste Anzahl g. L., welche zwischen einer gegebenen Anzahl von Punkten möglich sind, zu finden, multiplicire man die Zahl der Punkte mit der um 1 kleineren Zahl und dividire dieses Produkt durch 2.

11. Wenn ich, wie dieses erlaubt ist, jedes von 2 Stücken begränzte Stück einer g. L. für sich als eine g. L. ansehe, so gilt die vorstehende Auflösung auch von irgend einer Anzahl von Punkten, welche in derselben Richtung liegen.

12. Um die umgekehrte Aufgabe von Nro. 10 zu lösen, muß ich bedenken, auf welche Weise die Anzahl der geraden Linien gefunden wurde. Ich erinnere mich, daß dieses geschah, indem die Zahl der Punkte mit der vorhergehenden ganzen Zahl multiplicirt und von dem dadurch entstehenden Produkte die Hälfte genommen wurde. Die gegebene Zahl der Linien ist also die Hälfte dieses Produkts. Nehme ich daher die Zahl der Linien doppelt, so habe ich das ganze Produkt, welches durch die Multiplication zweier, um 1 von einander verschiedener Zahlen entstanden ist. Ich habe also nur 2 Zahlen zu suchen, die um 1 verschieden sind, und deren Produkt gleich der doppelten Anzahl der g. L. ist. Alsdann nennt mir der größere dieser Faktoren die gesuchte Zahl der Punkte. Die Anzahl der g. L. sei z. B. = 10; dieses 10 ist die Hälfte eines Produkts, das folglich = 20 ist, und dieses 20 ist durch die Multiplication zweier Zahlen entstanden, die um 1 von einander verschieden sind, welches keine andere Zahlen sind, als 5 und 4. Also ist 5 die gesuchte Anzahl der Punkte, zwischen welchen 10 g. L. möglicher Weise gezogen werden können. —

Anzahl der g. L. = 190; 2 . 190 = 380 = 20 . 19. Also ist die gesuchte Zahl der Punkte = 20.

Digitized by Google

Anzahl der g. L. = n. Ich nehme dieses n doppelt, also 2 n und suche 2 ganze Zahlen, deren Unterschied 1 beträgt und deren Produkt 2 n giebt.

Begreiflicher Weise darf ich die Anzahl der g. L. nicht ganz beliebig wählen, weil sich nicht jederzeit 2 Zahlen finden lassen werden, welche die verlangten Eigenschaften haben. Gesetzt z. B., die Anzahl der g. L. sei = 20 gegeben; 2.20 = 40. Aber es giebt keine 2 ganzen Zahlen, deren Unterschied = 1 und deren Produkt = 40 ist. Es giebt also keine Anzahl von Punkten, zwischen welchen die höchste Anzahl g. L. = 20 sein könnte. Dasselbe ist der Fall mit 55; 2.55 = 100; 100 aber läßt sich nicht als Produkt zweier um 1 unterschiedener ganzen Zahlen betrachten. Wäre daher 55 als möglich höchste Anzahl g. L. zwischen einer gegebenen Anzahl von Punkten genannt worden, so enthält diese Angabe etwas Unmögliches.

13. 3 Punkte, die alle unter einander gleiche Entfernung haben, bilden die Spitzen eines geradlinigen gleichseitigen Dreiecks.

14. Eine regelmäßige Allee von Bäumen stellt das Verlangte dar; auch jede Anzahl regelmäßig aufgestellter Soldaten.

15. Auch 4 Punkte können so gelegt gedacht werden, daß jeder von jedem so weit entfernt ist, wie der erste vom zweiten. 3 dieser Punkte lege ich in die Ebene dieses Papieres, und den 4ten so über die Ebene desselben, daß er von allen dreien gleich weit und von jedem so weit entfernt ist, wie der erste vom zweiten. — Mehr als 4 Punkte können nicht mehr so gelegt gedacht werden, daß jeder von jedem so weit entfernt ist, wie der erste vom zweiten. Und was in dieser Hinsicht in Gedanken nicht mehr möglich ist, das kann auch in der Wirklichkeit nicht statt finden.

16. Zwischen 6 Pappelbäumen liegen 5 Zwischenräume; der erste von der ersten zur zweiten Pappel. Mit der zweiten Pappel endigt der erste, mit der sechsten Pappel der fünfte Zwischenraum.

17. Und so befinden sich zwischen 100, in einer Linie aufgestellten Soldaten oder Bäumen 100 — 1 = 99 Zwischenräume; zwischen 1000 Soldaten 999, zwischen n so aufgestellten Dingen (n — 1) Räume, d. h. 1 Raum weniger, als Dinge vorhanden sind.

18. Anders ist die Aufgabe, wenn ich den Raum von jedem Punkte nach jedem andern für sich betrachte, unbekümmert darum, ob einer dieser Zwischenräume aus mehreren andern zusammengesetzt ist, oder nicht. In diesem Falle liegt zwischen „je zwei" Punkten ein Zwischenraum; von jedem Punkte aus kann ich also so viele Räume zählen, als außer ihm noch Punkte da sind. Gesetzt, es wären der gegebenen

Digitized by Google

Punkte überhaupt 6, so kann ich von jedem dieser 6 Punkte aus 5 Räume zählen; von 6 Punkten also 6 . 5 Räume. Der Raum vom ersten zum zweiten ist aber derselbe, wie der vom zweiten zum ersten. Ich muß daher, um die Anzahl aller, zwischen 6 Punkten möglichen Räume zu erhalten, das Produkt 6 . 5 noch durch 2 theilen; $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Das Bisherige gilt von jeder Anzahl von Punkten. Ist dieselbe im Allgemeinen = n, so giebt uns der Ausdruck $n.\frac{(n-1)}{2}$ eine Formel für die Auflösung der Aufgabe.

Es ist dieß dieselbe Formel wie die in Nr. 10.

19. Diese Aufgabe ist durch das Vorstehende bereits aufgelöset. Was hier eine Strecke heißt, war dort ein Zwischenraum. Demnach wird die möglich höchste Anzahl der Strecken zwischen einer gegebenen Anzahl von Punkten innerhalb einer geraden Linie gefunden, wenn man die Zahl der Punkte mit der um 1 kleineren Zahl multiplicirt und dieses Produkt durch 2 theilet.

20. Die umgekehrte Aufgabe heißt: Innerhalb einer g. L. liegt eine gewisse Anzahl Punkte; die Anzahl aller, zwischen je zweien dieser Punkte liegenden Strecken ist gegeben; wie groß ist die Zahl jener Punkte? Diese Aufgabe ist ganz einerlei mit der unter Nr. 12 aufgegebenen und gelöseten.

21. Wenn der eine von zwei außer einander liegenden Punkten sich dem andern nähert, bis er mit ihm vereinigt ist; so geschieht dieß entweder auf dem kürzesten, oder nicht auf dem kürzesten Wege. In jenem Falle ist der Weg des Punktes die bestimmte gerade Linie zwischen den beiden Punkten; in diesem Falle ist es irgend eine der zwischen 2 Punkten möglichen krummen Linien.

22. Wird die Möglichkeit der Lagen eines Punktes in Bezug auf die Lage einer g. L. untersucht, so erhellet leicht, daß der Punkt entweder innerhalb, oder außerhalb der Richtung der g. L. liegt. Innerhalb; und dann entweder in der geraden Linie, oder in ihrem Endpunkte, oder in ihrer Verlängerung.

23. Liegt der Punkt in der g. L. (F. 9, 1), so bewegt sich der Punkt entweder in der g. L. selbst, sie allenfalls verlängernd, oder er bewegt sich aus ihr heraus, und dieß entweder so, daß seine Richtung gegen beide Theile der Linie ungleiche Neigung hat, nach a an, oder so, daß die Richtung des Punktes gegen beide Seiten der Linie gleich geneigt oder gleich stark abgeneigt ist, nach b.

Liegt der Punkt im Endpunkt der Linie (F. 9, 2), so geht er entweder in ihr fort, links oder rechts nach a, oder er geht aus ihrer Richtung heraus, und dieß entweder in gleicher

Digitized by Google

Neigung gegen die Linie und ihre Verlängerung, nach c, oder in ungleicher Neigung nach b oder d hin.

Liegt der Punkt in der Verlängerung der Linie (F. 9, 3), so geht er wieder entweder in der Richtung der Linie, z. B. nach a, oder von ihr weg, in gleicher oder ungleicher Neigung gegen die beiden Theile der verlängert gedachten Linie, nach c, b oder d.

Ist die Lage des Punktes endlich außerhalb der g. L. (F. 9, 4), so nähert er sich entweder der Linie, oder er entfernt sich von ihr, oder er bleibt stets in gleicher Entfernung von ihr. Nähert er sich ihr, so geschieht dieß entweder auf dem kürzesten Wege, nach a hin, oder nicht auf dem kürzesten Wege, z. B. nach b hin. Entfernt er sich von ihr, so geschieht dieß entweder auf die schnellste Weise, nach d, oder nicht, z. B. nach c hin. Wenn der Punkt sich der Linie weder nähert, noch sich von ihr entfernt, so geht er nach e oder f hin.

24. Soll sich der eine Punkt fortbewegen und sich dem andern weder nähern, noch von ihm entfernen, so muß er, in immer gleicher Entfernung von dem zweiten, um denselben herumgehen. Es ist dieß so denkbar, daß der bewegte Punkt stets in derselben Ebene bleibt, oder auch so, daß er in verschiedenen Ebenen auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt der ruhende Punkt ist, sich fortbewegt. In jenem Falle entsteht eine krumme Linie, welche Kreislinie genannt wird, und, der Erklärung zufolge, die Eigenschaft hat, daß alle ihre Punkte von einem Punkte in derselben Ebene, in welcher sie liegen, gleich weit abstehen.

25. Fig. 9, 4 zeigt uns das Bild gleichlaufender Linien, mn und fe. Ihre Entstehungsart ist schon angegeben. Es sind solche Linien, welche in derselben Ebene liegen und in allen Punkten gleich weit von einander entfernt bleiben. In derselben Figur stellen mn und ob oder oa oder oc nicht-parallele Linien dar, und zwar mn und oa oder ob zusammenlaufende, mn und oc oder od auseinander laufende Linien. Begreiflicher Weise laufen 2 g. L., die auf einer Seite zusammen laufen, auf der andern Seite auseinander.

In Fig. 9, 1 sollen mn und ob senkrecht, und mn und oa schief zusammentreffende g. L. vorstellen. Senkrecht zusammentreffende g. L. treffen einander so, daß jede gegen beide Seiten der andern gleiche Neigung hat. Die Neigung zweier geraden Linien gegen einander heißt Winkel. Da bei senkrecht einander begegnenden g. L. die Neigungen jeder Linie gegen die beiden Seiten der andern einander gleich sind, so sind in diesem Falle die beiden entstandenen Winkel einander gleich. Solche Winkel, welche von senkrecht sich treffenden

Digitized by Google

Linien gebildet werden, heißen rechte Winkel (Zeichen derselben = R.); solche Winkel aber, welche von g. L., die einander schief treffen, gebildet werden, heißen auch schiefe Winkel, die entweder größer oder kleiner sind, als der rechte Winkel. Schiefe Winkel, welche > R. sind, heißen stumpfe Winkel; die, welche < R. sind, spitze.

In Fig. 9, 1 sollen bon und bom rechte, boa und aon spitze, aom aber soll einen stumpfen Winkel vorstellen.

Nebenwinkel sind solche Winkel, welche eine Linie mit einander gemein haben, und deren andere Linien in derselben Richtung liegen, wie z. B. in Fig. 1 bom und bon, oder aom und aon.

Scheitelwinkel sind solche, welche an demselben Punkte einander gegenüber liegen und von zwei sich durchkreuzenden g. L. gebildet werden. In Fig. 9, 4 können die Winkel aoe und dof, oder aob und doc solche vorstellen.

26. Die Sätze dieser Nummer sind für sich klar. Fig. 10 stellt die beiden Fälle unter 3, b vor.

27. Unter unendlicher Entfernung verstehe man eine solche, welche größer gedacht wird, als jede angebliche. — Wir wissen bereits, daß Parallellinien einander nie begegnen, da sie in allen ihren Punkten gleich weit von einander entfernt bleiben. Man könnte sich indessen wohl auch den Ausdruck erlauben: Parallellinien treffen in unendlicher Entfernung zusammen, d. h. in einer Entfernung, welche alle angeblichen übertrifft, und dieß heißt, dunkel gesprochen, so viel als das klarere Wort: sie treffen nirgends zusammen.

§. 10. Aufgaben an Formverbindungen durch Linien.

1. Wird die Größe zweier oder mehrerer Dinge gegenseitig verglichen, so finden immer zwei Fälle statt, indem diese Dinge der Größe nach entweder gleich, oder nicht gleich (ungleich) sind. Begreiflicher Weise kann unter den, in Hinsicht der Größe (Quantität) gleichen Dingen (oder Größen) in anderer Hinsicht, z. B. der Farbe, des Ortes u. s. w., Ungleichheit statt finden. Hier ist nur von der Größe der Dinge und namentlich von der räumlichen Ausdehnung die Rede.

2 Linien sind in Ansehung dieser räumlichen Ausdehnung entweder gleich, oder ungleich. In letzterem Falle ist die erste die größere, oder die kleinere. Ist sie die größere, so ist die andere nothwendig die kleinere, und umgekehrt. Sind sie gleich, so kann man in Ansehung der Größe die eine statt der andern setzen.

Digitized by Google

Bei 3 Linien finden folgende Fälle statt:

3 gleiche L., oder 2 gl., oder alle ungleich.

4 Linien: 4 gleiche;
3 gleiche;
2 gleiche und 2 gegen diese und unter einander ungleiche;
2 gleiche und 2 gegen diese ungleiche, aber unter einander gleiche;
4 ungleiche.

5 Linien: 5 gleiche;
4 gleiche und 1 (ihnen) ungleiche;
3 = und 2 auch unter einander ungleiche;
3 = und zwei unter sich gleiche;
2 = und 3 unter sich ungleiche;
2 = und 2 gl. und 1 ungl.;
5 ungleiche.

n Linien: n gleiche;
(n—1) = 1 ungl.;
(n—2) = 2 ungl. und unter sich ungl.;
(n—2) = 2 ungl., aber unter sich gl.;
(n—3) = 3 ungl. und unter sich ungl.;
(n—3) = 2 gl. und 1 ungl.;
(n—3) = 3 gl. u. s. w.

Leicht läßt sich dieß fortsetzen, und jeder Fall läßt sich eben so leicht zeichnen, was natürlich vom Schüler verlangt werden muß. Fig. 11 stellt die bei 4 Linien statt findenden Fälle dar.

2 u. 3. Nr. 2 ist für sich klar. In dieser Aufgabe werden die Linien nicht der Größe, sondern der Form nach mit einander verglichen.

3 Linien:

3	gerade;		
2	=	1	krumm;
1	=	2	=
0	=	3	=

} 4 Fälle.

4 Linien:

4	gr.	0	kr.	
3	=	1	=	
2	=	2	=	} 5 Fälle.
1	=	3	=	
0	=	4	=	

5 Linien:

5	gr.	0	kr.	
4	=	1	=	
3	=	2	=	} 6 Fälle.
2	=	3	=	
1	=	4	=	
0	=	5	=	

Digitized by Google

n Linien:

n	gr.	0	kr.
(n—1)	=	1	=
(n—2)	=	2	=
(n—3)	=	3	=
(n—4)	=	4	=
.		.	
.		.	
.		.	
0		n	

(n+1) Fälle.

Gesetz: Sucht man alle Fälle auf, welche bei der Vergleichung der Form einer gewissen Anzahl von Linien statt finden können, so ist die Zahl aller möglichen Fälle um 1 größer, als die Anzahl der gegebenen Linien.

4. Da wir die gerade Linie als den kürzesten Weg zwischen zweien Punkten kennen gelernt haben, so ist jede krumme Linie, welche dieselben Punkte verbindet, nothwendig länger als die gerade Linie.

5. Durch 2 Punkte, durch welche eine gerade Linie geht, wird die Lage dieser Linie vollkommen bestimmt. Haben 2 g. L. 2 Punkte mit einander gemein, so ist ihre Lage dieselbe; ihre Richtungen fallen in einander.

6. 2 oder mehrere g. L. liegen also in derselben Richtung, wenn sich zwei Punkte bestimmen lassen, welche in jeder dieser Linien liegen. In diesem Falle geht die Verlängerung der einen durch die Richtungen aller anderen. Sind 2 g. L. mit einander verbunden, so haben sie also entweder einen, oder (gehörig verlängert) alle Punkte mit einander gemein.

7. Sind 3 g. L. mit einander verbunden, so finden folgende Fälle statt:

Sie haben entweder 1 Punkt mit einander gemein (F. 12, 1);
oder 2 Punkte = = = (2);
oder 3 = = = = (3).

8. In dieser Aufgabe soll die parallele und convergirende Lage ger. Linien aufgefaßt, und es sollen alle Fälle aufgestellt werden, welche in dieser Beziehung mit einer gegebenen Anzahl g. L. statt finden können.

Mit 2 g. L. entstehen 2 Fälle; dieselben sind entweder parallel oder sie laufen zusammen (convergiren). (Fig. 16.)

Bei 3 L. sind 3 Fälle denkbar; denn sie sind entweder alle parallel, oder 2 sind par. und die dritte convergirt, oder sie convergiren alle. (Fig. 17.)

Diese 3 Fälle hätten auch aus dem Umstande erschlossen werden können, weil die Zahl 3 auf 3fache Art aus ganzen Zahlen zusammengesetzt gedacht werden kann.

Digitized by Google

Denn 3 = 3
= 2 + 1
= 1 + 1 + 1 . 3 Fälle.

Wollte man arithmetisch fortfahren, so hätte man nur die möglichen Zusammensetzungen der Zahl 4 aus ganzen Zahlen zu suchen. Da

4 = 4
= 3 + 1
= 2 + 1 + 1
= 2 + 2
= 1 + 1 + 1 + 1,

also auf 5fache Weise aus ganzen Zahlen zusammengesetzt gedacht werden kann, so geben 4 g. L. in Ansehung des Parallelismus und Nicht-Parallelismus auch 5 Fälle. Fig. 18 stellet sie dar.

Da 5 = 5
= 4 + 1
= 3 + 1 + 1
= 3 + 2
= 2 + 1 + 1 + 1
= 2 + 2 + 1
= 1 + 1 + 1 + 1 + 1, so geben 5 g. L. auch 7 Fälle. Fig. 19 stellet sie dar. — Es ist gleichgültig, ob man die Linien nur gegen einander neigt, oder ob man sie, als sich wirklich einander durchschneidend, ansiehet.

Da 6 = 6
= 5 + 1
= 4 + 1 + 1
= 4 + 2
= 3 + 1 + 1 + 1
= 3 + 2 + 1
= 3 + 3
= 2 + 1 + 1 + 1 + 1
= 2 + 2 + 1 + 1
= 2 + 2 + 2
= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, so geben 6 g. L. auch 11 Fälle, deren Zeichnung nicht schwer fallen wird. —

Aus dem Bisherigen folgt, daß bei n g. L. so viele Fälle möglich sind, so vielfach die Zahl n aus ganzen Zahlen zusammengesetzt gedacht werden kann.

Man wird bei fortgesetzter Operation finden, daß, wenn die Zahl der Linien 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ist,
2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42 Fälle
statt finden. Um jeden einzelnen Fall zu zeichnen, darf nicht vergessen werden, daß, wenn z. B. die Zahl 9 aus 5 + 2 + 2 zusammengesetzt gedacht wird, 5 g. L. in einer Rich-

Digitized by Google

tung, dann 2 in einer zweiten, jene durchschneidenden Richtung, und die folgenden 2 in einer dritten, jene beiden Richtungen durchschneidenden Richtung parallel gezogen werden müssen, welches Fig. 20 darstellt.

Zusatz. Um die Aufgabe der vorstehenden Nummer noch zu vervollständigen und allgemeiner zu betrachten, wollen wir noch Parallelismus und Lage in einer Richtung mehrerer g. L., dann Lage in einer Richtung und Convergenz, endlich Parallelismus, Lage in einer Richtung und Convergenz mit einander vergleichen.

1. Parallelismus und Lage in einer Richtung.

2 g. L. geben 2 Fälle. Sie sind entweder parallel oder in einer Richtung (Fig. 21).

3 g. L. geben 3 Fälle (Fig. 22).

4 g. L. geben 5 Fälle, dann (wie oben) $4 = 4$
$= 3 + 1$
$= 2 + 1 + 1$
$= 2 + 2$
$= 1 + 1 + 1 + 1$
(Fig. 23.)

5 g. L. geben 7,

6 = = 11,

7 = = 15 Fälle u. s. w., ganz dasselbe Gesetz, wie bei der Combination von Parallelismus und Convergenz.

2. Lage in einer Richtung und Convergenz.

Auch hier gilt dasselbe Gesetz. Bei einer gegebenen Anzahl g. L. finden so viele Fälle statt, so vielfach diese Zahl aus ganzen Zahlen zusammengesetzt gedacht werden kann. Die 5 Fälle mit 4 Linien stellt Fig. 24 dar.

3. Parallelismus, Lage in einer Richtung und Convergenz.

Bei 2 g. L. finden 3 Fälle statt, indem sie entweder beide in derselben Richtung liegen, oder parallel sind, oder convergiren (Fig. 25).

3 g. L. geben 6 Fälle. Betrachte ich nämlich zuerst bloß Parallelismus und Lage in einer Richtung, so entstehen die 3 Fälle, Fig. 22; betrachte ich den Parallelismus und Convergenz, so ergeben sich die 3 Fälle von Fig. 17, von denen aber der erste Fall schon in Fig. 22 vorkam; es bleiben also nur noch 2 Fälle als besondere übrig; betrachte ich endlich Lage

Digitized by Google

in einer Richtung und Convergenz, so entstehen auch 3 Fälle, von welchen aber ein Fall schon in Fig. 22 und ein Fall in Fig. 17 vorkam; von diesen 3 Fällen bleibt also nur einer als ein besonderer übrig. 3 Linien geben also im Ganzen 6 Fälle, welche Fig. 26 darstellt.

4. Linien.

Parallelismus und Lage in einer Richtung geben die 5 Fälle in Fig. 23. Parallelismus und Convergenz geben die 5 Fälle in Fig. 18. Lage in einer Richtung und Convergenz geben die 5 Fälle in Fig. 24. Bei der zweiten Betrachtung fällt 1, bei der dritten fallen 2 Fälle, als schon da gewesene, weg. Es bleiben also noch $5 + 4 + 3 = 12$ Fälle. Nun ist noch zu betrachten: Parallelismus, Lage in einer Richtung und Convergenz. Dieses giebt 2 neue Fälle, indem entweder von den 4 L. zwei parallel sind und die beiden andern, in einer Richtung liegend, gegen diese convergiren, oder indem 2 in einer Richtung liegen, die dritte mit diesen parallel ist und die vierte gegen alle convergirt. Diese beiden neuen Fälle stellt Fig. 27 dar. — Mit 4 Linien finden also 14 Fälle statt.

Die Bestimmung des allgemeinen Gesetzes der letzten Aufgabe wird hier übergangen. Wer die Auflösung fortzusetzen Lust hat, wird finden, daß 5 Linien 27, und 6 Linien 58 denkbare Fälle darstellen.

9. Wenn eine g. L. der Lage nach bestimmt ist, so wird die Lage einer zweiten g. L. gegen diese erste entweder dadurch bestimmt, daß 2 Punkte gegeben sind, durch welche die zweite Linie gehen soll, oder dadurch, daß die Größe des Winkels gegeben ist, welchen die zweite Linie mit der ersten macht, oder dadurch, daß der Winkel gegeben ist, welchen die zweite Linie mit einer dritten macht, die einen Winkel von gegebener Größe mit der ersten macht (Fig. 13).

10. Das gegenseitige Treffen zweier Linien ist von ihrem Durchschneiden dadurch verschieden, daß in diesem Falle beide Linien durch den gemeinschaftlichen Punkt verlängert sind, in jenem aber der Endpunkt der einen oder beider Linien in dem Punkte des Durchschnittes liegt (Fig. 14).

11. Zu Parallellinien werden wenigstens zwei gerade Linien erfordert. Uebrigens können so viel Linien, als man will, gegen einander parallele Lage haben.

12. Auch krumme Linien können gegenseitig eine solche Lage haben, daß man sie mit (geraden) Parallelen vergleichen kann, z. B. zwei Kreislinien, welche aus demselben Mittelpunkte gezogen sind, oder die Spuren der Räder eines fortbewegten Wagens, welcher gewöhnlich eine unregelmäßig krumme Linie beschreibt.

Digitized by Google

13. Um die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte einer gegebenen Anzahl g. L. zu bestimmen, denke man sich zuerst eine g. L. Diese bildet keinen Durchschnittspunkt. Die 2te L. durchschneide die erste; also 1 Punkt. Die 3te durchschneide die beiden ersten; also 2 Punkte mehr; folglich überhaupt 1 + 2 Punkte. Die 4te kann die 3 vorhergehenden durchschneiden, natürlich in 3 Punkten; nunmehr also überhaupt 1 + 2 + 3 Punkte. Die 5te bildet 4 neue Punkte; also überhaupt 1 + 2 + 3 + 4 Punkte. Dieß kann so fortgesetzt werden, und es ist einleuchtend, daß jede folgende Linie so viele neue Durchschnittspunkte liefert, als vorher schon Linien gegeben waren. Die 10te Linie z. B. kann alle 9 vorhergehenden g. Linien durchschneiden; sie liefert also 9 neue Punkte. Und 10 g. L. überhaupt werden als höchste Anzahl der Durchschnittspunkte geben: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

Allgemein: Um die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte, welche durch eine gegebene Anzahl g. L. gebildet werden können, zu finden, addire man die natürliche Reihe der ganzen Zahlen von 1 an bis zu der ganzen Zahl (mit inbegriffen), welche der gegebenen Anzahl g. L. vorhergeht. 6 g. L. geben 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 Punkte. n g. L. geben 1 + 2 + 3 . . . . . + (n − 2) + (n − 1) Punkte. — Wer mit der Summirung arithmetischer Reihen bekannt ist, wird die Summe dieser Reihen kürzer zu finden wissen. Die Formel für 100 g. L. würde heißen: $\frac{(1+99).99}{2} = 50.99 =$ 4950. Also können sich 100 g. L. höchstens in 4950 Punkten durchschneiden.

Die Formel für n g. L. würde sein: $(1+n-1).\frac{(n-1)}{2}$ $= n.\frac{(n-1)}{2}$ d. h. in Worten: Um die möglich höchste Anzahl der Durchschnittspunkte einer gegebenen Anzahl g. L. zu finden, multiplicire man die gegebene Zahl der Linien mit der um 1 geringeren Zahl, und nehme von diesem Produkte die Hälfte.

Zweite Auflösung dieser Aufgabe.

Jede der gegebenen g. L. kann jede der übrigen in einem Punkte durchschneiden. Sind z. B. 12 g. L. gegeben, so kann jede Linie die übrigen 11 durchschneiden. Jede bildet also 11 Durchschnittspunkte; 12 Linien also 12.11 Punkte. Da aber jeder dieser Punkte zweien Linien angehört, so muß dieses Produkt durch 2 getheilt werden, welches giebt $\frac{12.11}{2} =$ 6.11 = 66 Punkte für 12 Linien. Ebenso bildet jede von n gegebenen Linien (n − 1) Punkte; n g. L. also n. (n − 1) Punkte, und, dieses Produkt aus dem angegebenen Grunde

durch 2 getheilt, giebt: $n.\frac{(n-1)}{2}$, dieselbe Formel, welche auch durch die erste Auflösung gefunden wurde.

Die Anzahl der Punkte, welche 6 g. L. bilden, stellt Fig. 15 dar.

14. Wenn von 3 g. L. 2 parallel (Zeichen des Parallelismus: ∥) laufen, so kann die dritte Linie beide durchschneiden; es entstehen also höchstens 2 Durchschnittspunkte (Fig. 28).

Laufen von 4 g. L. 3 ∥, so entstehen höchstens 3 Punkte;

= = 5 = 4 = = = = 4 = ;
= = 6 = 5 = = = = 5 = ;
= = n = (n—1) = = = (n—1) = .

15. Haben von einer Anzahl g. L. alle eine parallele Lage, 2 ausgenommen, so können die Parallelen von jeder der beiden übrigen durchschnitten werden. Es entstehen dadurch doppelt so viele Punkte, als Parallelen da sind. Ueberdieß können die beiden Linien einander auch in 1 Punkt durchschneiden; es kommt also noch 1 Punkt hinzu. Unter der genannten Bedingung entstehen also

durch 4 geg. Linien $2.2 + 1 = 5$ Punkte (Fig. 29)
= 5 = = $2.3 + 1 = 7$ =
= 6 = = $2.4 + 1 = 9$ =
= n = = $2(n-2)+1 = 2n-4+1$
$= 2n-3$,

d. h., um unter der angegebenen Bedingung die höchste Anzahl möglicher Durchschnittspunkte zu finden, nehme man die Zahl der gegebenen Linien doppelt und ziehe von diesem Produkte 3 ab. — 100 g. L. geben z. B. $2.100 - 3 = 197$ Punkte.

16. Sind von einer gegebenen Anzahl Linien alle ∥, außer dreien, so kann jede der letzteren jede der Parallelen durchschneiden. Dadurch entstehen dreimal so viel Punkte, als Parallelen da sind. Ueberdieß schneiden 3 Linien einander höchstens in 3 Punkten, welche noch addirt werden müssen. Man hat also mit 5 g. L. $3.2 + 3 = 9$ Punkte (Fig. 30)

6 = $3.3 + 3 = 12$ =
7 = $3.4 + 3 = 15$ =
n $3(n-3)+3 = 3n-9+3$
$= 3n-6$, d. h., um die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte mit einer gegeb. Anzahl g. L., die parallel sind außer dreien, zu finden, multiplicire man die Zahl der Linien mit 3 und ziehe von diesem Produkte 6 ab. — 20 g. L. geben auf diese Weise $3.20 - 6 = 54$ Punkte.

17. Allgemein, wenn von p g. L. (p—q) parallel laufen, also q nicht parallel sind, welche die Parallelen und sich unter einander durchschneiden können, so bildet jede der q Linien in den Parallelen so viele Punkte, als Parallelen da sind, näm-

Digitized by Google

lich $(p-q)$; q Linien also $q.(p-q)$ Punkte. Ueberdieß durchschneiden die q Linien einander auch noch. Dieß geschieht nach Nr. 13 dieses Kapitels höchstens in $\frac{q.(q-1)}{2}$ Punkten. Im Allgemeinen entstehen also: $q.(p-q)+\frac{q(q-1)}{2}$ Punkte, welche Formel leicht in Worte übertragen werden kann. — Wären z. B. von 12 g. L. $(12-4)=8$ parallel, so hätte man höchstens $4.(12-4)+\frac{4.(4-1)}{2}=4.8+\frac{4.3}{2}=32+6=38$ Punkte.

18. Laufen von 6 g. L. 4 in der einen, 2 in einer andern Richtung parallel, so durchschneidet jede der 2 jede der 4 Linien, man hat also höchstens $2.4=8$ Punkte.

19. Sind von 20 g. L. 12 in einer, die übrigen 8 in einer andern Richtung parallel, so entstehen höchstens $8.12=96$ Punkte. Allgemein: $(n-p).p$ Punkte.

20. Sind von 12 g. L. 7 parallel, und gehen von den übrigen 5 noch 3 durch denselben Punkt; so kann jede dieser 3 jede der 7 durchschneiden. Dadurch erhält man $3.7=21$ Punkte. Dazu der eine, den die 3 unter sich bilden, macht $21+1=22$ Punkte. Noch sind 2 Linien, deren Lage beliebig genommen werden kann, übrig. Da die möglich höchste Anzahl der Durchschnittspunkte gesucht wird, so lege ich diese 2 so, daß jede von ihnen jede der übrigen $7+3=10$ durchschneidet. Ich erhalte dadurch noch $2.10=20$ Punkte. Außerdem können die beiden letzten Linien sich auch noch in 1 Punkt durchschneiden. Ueberhaupt giebt es also $3.7+1+2.(7+3)+1=21+1+20+1=43$ Punkte (Fig. 31).

21. Leicht wird jeder die mögliche Anzahl der unter den Bedingungen dieser Aufgabe möglichen Punkte $=1+1+6.10=62$ bestimmen (Fig. 32).

22. I. Die Aufgabe Nr. 20 heißt allgemein:

Von m g. L. sind $(m-n)$ parallel; von den n Linien gehen $(n-p)$ durch denselben Punkt. Wie viele Durchschnittspunkte höchstens?

Antwort: Die durch denselben Punkt gehenden $(n-p)$ Linien bilden 1 Punkt. Jede von ihnen durchschneidet jede der $(m-n)$ Parallelen. Dadurch entstehen $(n-p).(m-n)$ neue Punkte. Nun sind noch p Linien übrig, von welchen jede alle vorhergehenden, also $(m-n)+(n-p)=(m-p)$ durchschneiden kann. Dieses giebt $p.(m-p)$ Punkte. Ausserdem können sich die p Linien in der höchsten Anzahl von

Digitized by Google

Punkten, nehmlich in $\frac{p.(p-1)}{2}$ Punkten durchschneiden. Unter den Bedingungen der Aufgaben entstehen also:

$$1 + (n-p).(m-n) + p.(m-p) + \frac{p.(p-1)}{2} \text{ Punkte.}$$

Beispiel. Es sei $m = 12$, $n = 5$, $p = 2$, so hat man:

$$1+(5-2).(12-5)+2.(12-2)+\frac{2.(2-1)}{2}=1+3.7+2.10+1$$
$$=1+21+20+1$$
$$=43 \text{ Punkte, wie}$$

schon unter Nummer 20 gefunden wurde.

II. Die Aufgabe unter Nummer 21 heißt allgemein: Von m g. L. gehen (m—n) durch denselben Punkt, und die übrigen n durch einen andern Punkt. Wie viele Durchschnittspunkte höchstens?

Antwort: Die (m—n) L. bilden 1 Punkt; die n Linien auch 1 Punkt. Ueberdieß durchschneidet jede der n Linien die (m—n) Linien; es entstehen also noch $n.(m-n)$ Punkte. Im Ganzen also: $1+1+n.(m-n)$ Punkte.

Beispiel. Es sei $m = 16$, $n = 6$, so hat man:

$$1 + 1 + 6.(16-6) = 2 + 6.10$$
$$= 62 \text{ Punkte, wie schon unter}$$

Nummer 21 gefunden wurde.

23. Wenn von 24 g. L. 12 in der einen, 8 in einer andern, 4 in einer dritten Richtung parallel sind, so durchschneiden möglicher Weise die 8 Linien die 12, und die 4 durchschneiden die 8 und die 12. Es giebt also

$$8.12 + 4\,(8+12) = 96 + 80 = 176 \text{ Punkte (Fig. 33).}$$

Allgemein: $p.q + (n-p-q).(p+q)$ Punkte.

24. Die 20 einander gleichlaufenden Linien haben keinen Durchschnittspunkt; die 6 Linien bilden unter sich einen, und jede von ihnen kann die 20 Parallelen durchschneiden, wodurch $6.20 = 120$ Punkte entstehen. Die 4 L. bilden unter sich 1 Punkt, und jede von ihnen kann die 20 Parallelen und die 6 andern Linien durchschneiden, wodurch $4.26 = 104$ Punkte entstehen. Also giebt es möglicher Weise $1 + 6.20 + 1 + 4.(20+6) = 1 + 120 + 1 + 104 = 226$ Punkte.

Allgemein: Die q L. geben 1 Punkt unter sich und durch den Durchschnitt der p Linien $q.p$ Punkte; die $(n-p-q)$ L. geben unter sich 1 Punkt, und durch den Durchschnitt der $(q+p)$ L. $(n-p-q).(q+p)$ Punkte. Folglich entstehen

$$1+q.p+1+(n-p-q).(q+p) \text{ Punkte.}$$

25. Wenn sich in einem Punkte 2 g. L. durchschneiden, so entstehen an diesem Punkte und von ihm aus 4 Strahlen, wie

Digitized by Google

überhaupt an jedem Durchschneidungspunkte zweier g. L. Will ich nun wissen, wie viele Strahlen durch eine gegebene Anzahl g. L. gebildet werden können, so brauche ich nur zu überlegen, in wie vielen Punkten sich diese g. L. durchschneiden können. Multiplicire ich diese Anzahl der Punkte mit 4, so habe ich das Gesuchte.

6 gerade Linien z. B. durchschneiden einander höchstens in $\frac{6.5}{2} = 15$ Punkten. Da nun an jedem Durchschnittspunkte zweier g. L. 4 Strahlen liegen, so sind hier im Ganzen 15.4 = 60 Strahlen.

n g. L. geben höchstens $\frac{n.(n-1)}{2}$ Punkte; folglich $\frac{4n.(n-1)}{2}$ = 2 n . (n — 1) Strahlen; d. h., um die möglich höchste Anzahl der Strahlen, welche durch eine gegebene Zahl gerader Linien gebildet werden können, zu finden, multiplicire man die Zahl der Linien mit der um 1 kleineren Zahl und verdoppele dieses Produkt. 10 g. L. z. B. geben 2.10.9 = 180 Strahlen.

26. Wenn eine Anzahl g. L. sich in der höchsten Anzahl von Punkten durchschneidet, so wird jede dieser g. L. von so vielen Linien durchschnitten, als Linien gegeben sind weniger eine. Sind der Linien z. B. 6, so liegen in jeder 5 Punkte. 5 Punkte begränzen aber (nach §. 9 Nr. 19) $\frac{5.4}{2} = 10$ Strecken.

Man hat daher nur die Anzahl der Punkte zu suchen, welche in jeder Linie liegen, dann die Zahl der Strecken zu bestimmen, welche sich in jeder Linie befinden, und diese mit der Zahl aller Linien zu multipliciren. Wären der Linien im Allgemeinen n, so liegen in jeder Linie (n—1) Punkte. Zwischen (n — 1) Punkten sind begränzt: $\frac{(n-1).(n-2)}{2}$ Strecken. Wenn man diesen Ausdruck mit der Anzahl aller Linien, nämlich mit n multiplicirt, so erhält man für die Bestimmung aller möglichen Strecken den Ausdruck $\frac{n.(n-1).(n-2)}{2}$; d. h., man multiplicire die Zahl der Linien mit der um 1, und dieses Produkt mit der um 2 kleineren Zahl, und dividire dieses neue Produkt durch 2, so hat man das Verlangte.

Wäre n z. B. = 6, so hätte man $\frac{6.5.4}{2} = 60$, wie es schon gefunden worden ist.

27. Hier hat man abermals zuerst zu untersuchen, wie viele Punkte in jeder geraden Linie liegen. In jeder der 6 Linien liegen offenbar 4 Punkte; zwischen 4 Punkten befinden sich $\frac{4.3}{2}$

Digitized by Google

= 6, in allen 6 Linien also 6.6 = 36 Strecken. In jeder der 4 Linien liegen 6 Punkte; zwischen 6 Punkten hat man $\frac{6.5}{2}$ = 15 Strecken; in den 4 Linien also 4.15 = 60 Strecken. Die Anzahl der Strecken überhaupt beträgt also 36 + 60 = 96.

Allgemein: Von den p Linien wird jede von (n—p) Linien durchschnitten; daher liegen auch in jeder (n—p) Punkte. Zwischen (n—p) Punkten giebt es $\frac{(n-p).(n-p-1)}{2}$ Strecken. Also in p Linien $\frac{p.(n-p).(n-p-1)}{2}$ Strecken. Jede der (n—p) L. wird von p Linien durchschnitten; so viele Punkte liegen also auch in jeder. Zwischen p Punkten sind begränzt $\frac{p.(p-1)}{2}$ Strecken: in (n—p) L. liegen also $\frac{(n-p).p.(p-1)}{2}$ Strecken. Man hat also überhaupt $\frac{p.(n-p).(n-p-1)}{2}$ + $\frac{(n-p).p.(p-1)}{2}$ Strecken.

28. Von den 4 Parallelen wird jede von 4 Linien durchschnitten; in jeder der 4 Parallelen befinden sich daher auch 4 Punkte. Zwischen 4 Punkten liegen $\frac{4.3}{2}$ = 6 Strecken; in den Parallelen hat man also 4.6 = 24 Strecken. Nun ist noch zu suchen, wie viele Strecken in den andern 4 Linien liegen. Jede derselben wird von allen andern 7 Linien durchschnitten; also liegen auch in jeder 7 Punkte. 7 Punkte begränzen $\frac{7.6}{2}$ = 21 Strecken. In den Linien liegen also 4.21 = 84 Strecken. In der Formverbindung der Aufgabe (Fig. 34) befinden sich demnach 24 + 84 = 108 Strecken.

§. 11. Winkel.

1. Ein Winkel entsteht, wenn 2 g. L., welche nicht in derselben Richtung liegen und nicht parallel sind, einander treffen.
2. Ein Winkel ist die Größe der Neigung zweier Linien gegen einander.
3. In Ansehung der Form der Linien, von welchen Winkel gebildet werden können, giebt es geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Winkel.

Die ersteren werden von 2 geraden, die andern von krum-

Digitized by Google

men, und die letzten von einer geraden und einer krummen Linie gebildet.

Streng genommen giebt es eigentlich nur geradlinige Winkel. Denn auch sogenannte krummlinige Winkel werden durch die Richtungen bestimmt, welche die krummen Linien an dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte haben. Richtungen aber sind immer gerade.

4. Schenkel des Winkels heißen die beiden Linien, welche den Winkel bilden. Derjenige Punkt, an welchem der Winkel liegt oder in welchem die beiden Linien einander treffen, heißt der Scheitelpunkt oder der Scheitel des Winkels. Winkelraum heißt die Ebene, welche zwischen den Schenkeln des Winkels liegt, und theilweise, nämlich von den Schenkeln des Winkels, begränzt ist, nach der Seite aber, nach welcher sich die Schenkel, von dem Scheitel aus, erstrecken, als unbegränzt angesehen wird.

5. Linien, von welchen die eine in der Verlängerung der andern liegt, oder welche zusammengezogen nur eine Linie bilden, machen keinen Winkel mit einander.

6. Trifft eine g. L. eine andere g. L. so, daß jene gegen die beiden Seiten dieser gleiche Neigung hat, so steht sie auf derselben senkrecht und bildet 2 Winkel mit ihr, in welchen die Schenkel gleiche Neigung zu einander haben, folglich gleich sind. Diese von 2 senkrecht auf einander stehenden g. L. gebildeten Winkel nennt man rechte Winkel (R). Ist die Neigung der beiden Schenkel zu einander weniger groß, so ist der Winkel also $< R$, d. h. spitz; ist aber die Neigung der Schenkel größer, so ist der Winkel stumpf (Fig. 35).

7. Schief nennt man alle Winkel, welche nicht rechte sind. Die schiefen sind daher entweder stumpfe oder spitze. Man theilt daher sämmtliche geradlinige Winkel in rechte und schiefe ein. Und die schiefen in spitze und stumpfe. Oder schematisch (übersichtlich) dargestellt:

Winkel

$= R$. (rechter Winkel)	nicht $= R$	
	$< R$ (spitzer W.)	$> R$ (stumpfer W.)

8. Aus der Erklärung, wie der rechte Winkel entsteht, geht hervor, daß er immer dieselbe (beständige oder constante) Größe hat, daß also alle rechten Winkel einander gleich sind.

9. Um zu erfahren, ob ein Winkel ein rechter, spitzer oder stumpfer sei, errichte man auf einer g. L. eine senkrechte, und nun bringe man den zu prüfenden Winkel auf den gezeichne-

Digitized by Google

ten rechten Winkel. Fallen seine Schenkel mit den Schenkeln des rechten Winkels zusammen, so ist er ein rechter; im Gegentheil entweder spitz oder stumpf. Jenes, wenn ein Schenkel des zu prüfenden Winkels in einen Schenkel des rechten Winkels, mit dem anderen Schenkel aber zwischen die Schenkel des rechten Winkels fällt (Fig. 36). Fällt der zweite Schenkel des zu prüfenden Winkels außerhalb der Schenkel des rechten Winkels, so ist er ein stumpfer Winkel (F. 37). Der Unterschied eines spitzen und stumpfen Winkels vom rechten Winkel ist dadurch zugleich anschaulich gemacht.

10. Nebenwinkel sind immer zusammen genommen = 2 R. Ist jeder = 1 R, so ist dieß für sich klar. Ist der eine > R, so ist der andere um eben so viel < R, um wie viel jener größer ist als der rechte. Anschaulich zeigt dieß Fig. 9, 1.

11 u. 12. Der rechte Winkel hat immer dieselbe Größe. Nicht so die schiefen Winkel. Es giebt größere und kleinere spitze, größere und kleinere stumpfe Winkel. Die schiefen Winkel sind nicht von beständiger (constanter) Größe.

Da der spitze Winkel stets < R ist, so ist R die eine Gränze, welche der spitze Winkel nicht erreichen kann, ohne aufzuhören, ein spitzer Winkel zu sein. Denke ich denselben fort und fort kleiner werden, so nähert er sich dem Nichts, der Null, der Nullgröße, und dieß ist die andere Gränze, welche er nicht erreichen kann, ohne aufzuhören, das zu sein, was er ist. Die beiden Gränzen der Größe aller spitzen Winkel sind demnach das Nichts und der rechte Winkel, die Nullgröße und R, zwischen welchen die Größe jedes spitzen Winkels enthalten sein muß. Die Gränzen für die Größe des stumpfen Winkels sind R und 2R, die Größe eines und die Größe zweier rechten Winkel. Jeder stumpfe Winkel ist > R und < 2 R. Erreicht ein stumpfer Winkel durch stetig gedachtes Wachsthum oder stetig gedachte Abnahme die Größe eines oder zweier Rechten, so hat er damit aufgehört, ein stumpfer Winkel zu sein.

13. Da jede 2 Nebenwinkel = 2 R sind, so muß der Nebenwinkel eines spitzen Winkels ein stumpfer sein. Entweder sind beide Winkel, welche Nebenwinkel sind, rechte, oder der eine ist spitz und der andere stumpf. Keinen dritten Fall kann es geben.

14. Durchschneiden 2 g. L. einander, so liegen um den Durchschnittspunkt herum 4 Winkel. Je 2 und 2 neben einander liegende machen Nebenwinkel; also sind diese 4 Winkel, da je 2 Nebenwinkel = 2 R, zusammen = 4 R.

Durchschneiden sich mehr als 2 g. L. in demselben Punkt, (Fig. 9, 4), so bleibt die Summe aller Winkel um diesen Punkt dieselbe, nämlich = 4 R; denn Linien haben weder Breite, noch Dicke; sie nehmen also nichts von dem vorhan-

Digitized by Google

denen Raume der Ebene weg. Die Summe aller Winkel um einen Punkt, in derselben Ebene, ist demnach stets = 4 R. — Um nun die Summe aller rechten Winkel zu finden, welche von einer gegebenen Anzahl gerader, einander in der höchsten Anzahl von Punkten durchschneidender, geraden Linien gebildet werden, braucht man nur die höchste Anzahl ihrer Durchschnittspunkte zu suchen, und, da die Summe aller Winkel um einen Punkt = 4 R, die Zahl der entstandenen Punkte mit 4 zu multipliciren.

4 g. L. durchschneiden einander höchstens in $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Punkten; die Summe der dadurch gebildeten Winkel, in rechten Winkeln ausgedrückt, ist also = 4 . 6 = 24 R. n g. L. bilden höchstens $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Punkte; also höchstens $4 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ $= 2n(n-1)$ rechte Winkel.

15. Angenommen, daß in derselben Ebene, um einen Punkt herum, 4 Winkel liegen, so ist die möglich e Größe der einzelnen Winkel folgende (wenn vorerst gar nicht darauf Rücksicht genommen wird, daß ihre Summe = 4 R ist):

	R	sp.	stumpfe W.	
1.	4	0	0	Diese 15 Fälle wären möglich,
2.	3	1	—	wenn man davon absieht, daß
3.	3	—	1	ihre Summe = 4 R sein muß.
4.	2	1	1	Da aber die Summe der 4 Win-
5.	2	2	—	kel bestimmt = 4 R ist, so fallen
6.	2	—	2	von den 15 Fällen alle diejeni-
7.	1	3	—	gen weg, in welchen die Summe
8.	1	—	3	der angegebenen Winkel nicht =
9.	1	2	1	sondern $\gtrless$ 4 R ist. Dieses ist der
10.	1	1	2	
11.	—	4	—	Fall mit den Fällen 2, 3, 5,
12.	—	3	1	6, 7, 8, 11 und 15. Denn 3 R
13.	—	2	2	und 1 spitzer z. B. machen nicht
14.	—	1	3	4 R. Es bleiben also nur fol-
15.	—	—	4	gende wirkliche Fälle übrig:

1.	4 R				
2.	2 =	1 sp.	1 st.		
3.	1 =	2 =	1 =		
4.	1 =	1 =	2 =		
5.	— =	3 =	1 =	welche Fälle durch Zeichnun-	
6.	— =	2 =	2 =	gen leicht anschaulich zu ma-	
7.	— =	1 =	3 =	chen sind.	

Anmerk. Man thut, der allgemeineren Uebersicht wegen, stets wohl daran, die allgemeine Combination der specielleren vorauszuschicken. Der Schüler erlangt dadurch eine allgemeinere Ansicht von dem Gegen-

Digitized by Google

stande. Der Gewinn allgemeiner Begriffe und Ansichten ist ja vorzugsweise der Zielpunkt der mathematischen Bildung.

16. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß, wenn nur Winkel einer Art, nur rechte, oder nur spitze, oder nur stumpfe, in einer Ebene um denselben Punkt herum liegen, dieses sein können:

1. 4 rechte, oder
2. 5 oder mehr spitze, oder
3. 3 stumpfe.

Liegen 4 Winkel um denselben Punkt, und sind drei derselben rechte Winkel, so muß der vierte auch ein rechter sein. Liegen 4 gleiche Winkel um denselben Punkt herum, so muß ebenfalls jeder 1 R sein. Füllen 3 gleiche Winkel den Raum um einen Punkt, so muß jeder ein stumpfer, und zwar = dem dritten Theile von 4 R oder = $^4/_3$ eines R sein. Umfassen 5 gleiche Winkel den Raum um einen Punkt herum (immer in derselben Ebene), so sind alle Winkel spitz, und zwar ist jeder = $^4/_5$ R.

17. Wenn die Anzahl der einander gleichen, den Raum um einen Punkt füllenden, Winkel

3 ist, so ist jeder derselben = $^4/_3$ R
4 = = = = = = $^4/_4$ R = R
5 = = = = = = $^4/_5$ R
6 = = = = = = $^4/_6$ R = $^2/_3$ R
n = = = = = = $\frac{4}{n}$ R.

18. Mit 2 g. L. können gebildet werden: 1, oder 2, oder 4 Winkel; nicht aber 3. Denn mit dem dritten erscheint auch sogleich der vierte Winkel.

19. Durchschneiden einander in demselben Punkte

2 g. L., so entstehen 4 Winkel
3 = = = 6 =
4 = = = 8 =
5 = = = 10 =
n = = = 2n =, d. h. doppelt so viele Winkel, als Linien durch denselben Punkt gezogen sind.

20. Je zwei einander gegenüberliegende Winkel, welche an dem Durchschnittspunkte gerader Linien liegen, geben 1 Paar Scheitelwinkel. Die Anzahl der Scheitelwinkel-Paare, welche von mehreren, durch denselben Punkt gehenden g. L. gebildet werden, ist also = der Hälfte aller gebildeten Winkel.

2 g. L. bilden 2 Paar Scheitelwinkel
3 = = 3 = =
4 = = 4 = =
n = = n = =, d. h., die Anzahl der

Scheitelwinkel-Paare ist gleich der Zahl der einander durchschneidenden Linien.

21. 2 sich durchschneidende g. L. bilden 4 Paare Nebenwinkel.

22. Durchschneiden gerade Linien einander in der höchsten Anzahl von Punkten, so ist die Zahl aller dadurch gebildeten Winkel höchstens 4mal so groß als die Zahl der Punkte, weil an jedem Punkte höchstens 4 Winkel liegen können.

2 g. L. bilden höchstens 1 Punkt, also höchstens 4 Winkel.

3 = = = $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ = = $4 \cdot 3 = 12$ =

4 = = = $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ = = $4 \cdot 6 = 24$ =

5 = = = $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ = = $4 \cdot 10 = 40$ =

6 = = = $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ = = $4 \cdot 15 = 60$ =

7 = = = $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ = = $4 \cdot 21 = 84$ =

n = = = $\frac{n(n-1)}{2} = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2n(n-1)$.

Die dadurch entstandene Zahlenreihe 4, 12, 24, 40, 60, 84 u. s. w. giebt zu Unterschieden je zweier auf einander folgenden Glieder die Reihe 8, 12, 16, 20, 24 u. s. w., deren Unterschiede je zweier auf einander folgenden Glieder die (constante) Zahl 4 geben.

23. 4 g. L. durchschneiden einander höchstens in $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Punkten, an welchen höchstens $4 \cdot 6 = 24$ Winkel liegen können. Sollte nun die Anzahl der durch 4 g. L. gebildeten Winkel = 23 sein, so müßten an einem jener 6 Durchschnittspunkte 3 Winkel liegen, welches nach Nr. 18 nicht möglich ist. Von 4 g. L. können also nicht 23 Winkel, so, daß ihrer nicht mehr sind, gebildet werden.

24. An jedem Punkte, in welchem sich 2 g. L. durchschneiden, liegen 2 Scheitel- und 4 Nebenwinkel-Paare. Durchschneiden sich in der höchsten Anzahl von Punkten

3 g. L., so hat man $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ P. u. $3 \cdot 2 = 6$ Sch. W. u. $3 \cdot 4 = 12$ N. W. Paare.

4 = = = = $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ = $6 \cdot 2 = 12$ = $6 \cdot 4 = 24$ = =

5 = = = = $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ = $10 \cdot 2 = 20$ = $10 \cdot 4 = 40$ = =

6 = = = = $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ = $15 \cdot 2 = 30$ = $15 \cdot 4 = 60$ = =

7 = = = = $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ = $21 \cdot 2 = 42$ = $21 \cdot 4 = 84$ = =

Digitized by Google

Die Zahlen der Punkte bildet die Zahlenreihe

3, 6, 10, 15, 21 u. s. w.,

deren Unterschiede je zweier auf einander folgenden Zahlen die Zahlenreihe geben:

3, 4, 5, 6 u. s. w.,

welche auf den bleibenden Unterschied 1 führt.

Die Zahlen der Scheitelwinkel-Paare führen auf die Zahlenreihe

6, 12, 20, 30, 42 u. s. w.,

deren Unterschiede die Zahlenreihe

6, 8, 10, 12 u. s. w.

geben, deren Unterschiede die beständige Zahl 2 darstellen.

Die Zahlen der Nebenwinkel-Paare bilden die Reihe

12, 24, 40, 60, 84 u. s. w.,

deren Unterschiede

12, 16, 20, 24 u. s. w. sind, die den beständigen Unterschied 4 darstellen.

Die Unterschiede der Unterschiede dieser 3 Zahlenreihen führten jedesmal auf eine beständige Größe; die erste Zahlenreihe ergab 1, die zweite 2, die dritte 4 — überall Gesetzmäßigkeit oder, was dasselbe ist, rationelle Schönheit, deren Wahrnehmung und Auffassung ein rein geistiges Vergnügen gewährt.

25. Da an jedem Durchschnittspunkte zweier g. L. 4 Winkel gebildet werden können, so hat man, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, nur die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte zu suchen und dieselbe mit 4 zu multipliciren. Es seien z. B. von 9 g. L. 5 gleichlaufend. Die 4 übrigen durchschneiden die 5 L. in $4.5 = 20$ Punkten, und die 4 L. durchschneiden einander in $\frac{4.3}{2} = 6$ Punkten. Die Anzahl der Durchschnittspunkte ist also $20 + 6 = 26$, und folglich die Zahl aller Winkel $= 26.4 = 104$.

26. Gehen von einem Punkte 2 Strahlen aus, so liegt zwischen ihnen 1 Winkel. Gehen von diesem Punkte mehrere Strahlen aus, so daß alle einzelnen, zwischen den Strahlen liegenden Winkel < 2 R; so liegen zwischen 3 Strahlen 2

4 = 3

5 = 4

n = (n—1) Winkel, welches die darüber zu entwerfende Zeichnung genügend veranschaulichen wird.

27. Einfache Winkel nennt man im Gegensatze gegen vielfache solche, die nicht aus mehreren Winkeln zusammengesetzt sind,

Digitized by Google

welches bei letzteren der Fall ist. Ist ein Winkel aus zweien zusammengesetzt, so kann man ihn einen zweifachen nennen; ein fünffacher würde ein solcher sein, welcher aus 5 Winkeln besteht.

28. Man ziehe eine g. L. (vielmehr einen geraden Strich, welcher als Bild der gedachten g. L. angesehen wird), nehme in derselben einen Punkt an und ziehe von diesem Punkte aus, auf einer Seite der g. L., 6 Strahlen (Fig. 38), so entstehen durch diese Linienverbindung

7 einfache Winkel
6 zweifache =
5 dreifache =
4 vierfache =
3 fünffache =
2 sechsfache =
1 siebenfacher =.

Die Schenkel des siebenfachen Winkels liegen in derselben Richtung; also ist dieß nicht eigentlich ein Winkel mehr.

29. Zwischen 3 Strahlen, welche von demselben Punkte aus beliebig gezogen werden können, liegen möglicher Weise:

3 einfache,
3 verbundene, wenn ich je 2 und 2 neben einander liegende als einen Winkel ansehen darf (Fig. 39).

Zwischen 4 Strahlen finde ich auf dieselbe Weise:

4 einfache,
8 verbundene (4 zwei- und 4 dreifache).

Zwischen 5 Strahlen:

5 einfache,
15 verbundene.

Zwischen n Strahlen:

n einfache. Um die Anzahl der verbundenen zu finden, ist zu bedenken, daß jeder Strahl mit jedem Strahle 2 Winkel bildet; jeder Strahl bildet also mit den übrigen $(n-1)$ Strahlen $2(n-1)$ Winkel; n Strahlen also $2n(n-1)$ Winkel. Da aber jeder Winkel 2 Schenkel hat, so nennt diese Formel die doppelte Anzahl aller Winkel, und die Anzahl selbst ist $= n(n-1)$. Zieht man davon die Zahl der einfachen $= n$ ab, so bleibt die Anzahl der verbundenen Winkel übrig, $= n(n-1) - n = n.n - n - n = n.n - 2n$; d. h., um die Anzahl aller möglichen verbundenen Winkel, welche von einer gegebenen Anzahl Strahlen gebildet werden, zu finden, multiplicire man die Zahl der Strahlen mit sich selbst und ziehe von diesem Produkte die doppelte Zahl der Strahlen ab. Demnach geben

2 Strahl. überhaupt $2(2-1)=2$ W. u. $2.2-2.2=0$ verb. W.
3 = = $3(3-1)=6$ = $3.3-2.3=3$ = =
4 = = $4(4-1)=12$ = $4.4-2.4=8$ = =
5 = = $5(5-1)=20$ = $5.5-2.5=15$ = =
10 = = $10(10-1)=90$ = $10.10-2.10=80$ = =

30. Zieht man mehrere g. L. mit einander parallel, so liegen Zwischenräume zwischen ihnen, und zwar

zwischen 2 Linien 1 Zwischenraum;
= 3 = 2 Zwischenräume;
= 4 = 3 =
= n = $(n-1)$ = .

Hiermit sind bloß die einzelnen, nicht aber die verbundenen gezählt. Sollen alle zusammen gezählt und berechnet werden, so bedenke ich, daß zwischen je zweien Linien ein Zwischenraum liegt, daß also jede g. L. mit jeder andern einen solchen bildet. Sind n L. vorhanden, so bildet jede $(n-1)$ Zwischenräume, n L. also $n(n-1)$ derselben. Von diesem Produkte muß aber, weil jeder Zwischenraum von zweien Linien begränzt ist, jeder also doppelt gezählt ist, die Hälfte genommen werden, welches $\frac{n(n-1)}{2}$ giebt. Es bilden also überhaupt

2 Linien $\frac{2.(2-1)}{2} = 1$ Zwischenraum;
3 = $\frac{3.(3-1)}{2} = 3$ Zwischenräume;
4 = $\frac{4.(4-1)}{2} = 6$ =
5 = $\frac{5.(5-1)}{2} = 10$ =
n = $\frac{n.(n-1)}{2}$ = .

Vorstehendes gilt nicht nur für den Fall, wenn die Linien parallel laufen, sondern auch, wenn sie von demselben Punkte ausgehen.

31. Die umgekehrte Aufgabe heißt: Die möglich größte Anzahl der Zwischenräume, welche von einer gegebenen Anzahl Parallellinien oder von demselben Punkte ausgehender g. L. gebildet werden, ist gegeben; man sucht die Anzahl dieser Linien.

Auflösung. Aus der Auflösung der (directen) Aufgabe geht hervor, daß die Zahl der Zwischenräume die Hälfte eines Produktes ist, welches aus der Multiplication zweier, nur um 1 unterschiedenen ganzen Zahlen entstanden. Nimmt man daher die Zahl der Zwischenräume doppelt und sucht zwei Zahlen,

Digitized by Google

welche nur um 1 verschieden sind, und zum Produkte die doppelte Zahl der Zwischenräume hervorbringen, so ist die größere der gefundenen beiden Zahlen die gesuchte Zahl.

Beispiel. Die Zahl der Zwischenräume sei = 21. Diese Zahl doppelt genommen, giebt 42; 42 = 7.6; also ist 7 die Anzahl der gegebenen Linien. — Begreiflicher Weise dürfen die Zahlen für die Anzahl der Zwischenräume nicht ganz willkührlich genommen werden.

52. Den spitzen Winkel stelle der dritte Winkel in Fig. 35 dar. Dadurch, daß ich den einen Schenkel in der Ebene des Papiers von dem unbeweglich gedachten Schenkel wegbewegt denke, vergrößert sich offenbar die Neigung der beiden Schenkel gegen einander, d. h. der Winkel, den die Schenkel mit einander machen, wächst. Dieses Wachsthum des Winkels ist so stetig, als die Bewegung des Schenkels; es kommt ein Augenblick, wo der Winkel ein rechter geworden ist, und in dem darauf folgenden wird er ein stumpfer sein. Geht die Bewegung immer stetig fort, so wird endlich die Richtung des bewegten Schenkels in die Richtung des ruhenden fallen; beide werden nun eine gerade Linie bilden.

53. Bei fortgesetzter Bewegung wächst der ursprüngliche Winkel über 2 R hinaus. Und wenn wir eine solche Größe noch als einen Winkel ansehen wollen, wie es zweckmäßiger Weise geschieht, so verbinden wir nun mit dem Worte »Winkel« einen weiteren Begriff, als dieß ursprünglich der Fall war. Und in dem nunmehr gewonnenen Sinne zerfallen alle Winkel in solche, welche $> 2\,R$, $= 2\,R$ und $< 2\,R$ sind. Jene heißen erhabene, die andern gestreckte oder flache, die letzteren hohle Winkel. Der gestreckte Winkel bildet den Uebergang vom erhabenen zum hohlen, und umgekehrt.

Die Gränzen der hohlen Winkel sind 0 und 2 R;
= = = erhabenen = = 2 R und 4 R.

Beide Arten können ihre Gränzen nicht erreichen, ohne aufzuhören, das zu sein, was sie sind.

Von beständiger, immer sich gleich bleibender Größe sind die rechten und flachen Winkel; jene sind stets = R, diese = 2R. Die hohlen und erhabenen Winkel haben keinen constanten Werth. Das folgende Schema ergänzt, als anschaulich dargestellte Eintheilung, die oben über den Begriff Winkel entworfene Tabelle.

Winkel.

$< 2\,R$	$= 2\,R$	$> 2\,R$
hohler W.	flacher W.	erhabener W.

$> R$	$= R$	$> R$
spitzer	rechter	stumpfer

Digitized by Google

34. Um einen Punkt oder an einem Punkte in derselben Ebene kann nur 1 erhabener Winkel liegen. Denn alle um einen Punkt herum liegenden Winkel sind = 4 R; da nun der erhabene > 2 R, so bleibt, als Rest, weniger als 2 R, d. h. ein hohler Winkel übrig.

Lägen nur spitze Winkel um einen Punkt herum, so sind derselben wenigstens 5, und ihre möglich größte Anzahl ist unendlich.

Liegen nur stumpfe Winkel um einen Punkt herum, so sind derselben wenigstens und höchstens, also immer, 3. Denn jeder stumpfe ist > R und < 2 R. Es müssen ihrer also wenigstens 3 sein, da ihre Summe = 4 R sein soll. Mehr können ihrer aber auch nicht sein, weil 4 stumpfe schon > 4 R sind. Ein erhabener Winkel allein kann den Raum um einen Punkt herum nicht ausfüllen; mit ihm ist nothwendig noch ein stumpfer, oder ein rechter, oder ein spitzer verbunden.

Wollte man den, in Nro. 32 und 33 bewegt gedachten Schenkel so weit fortgehen lassen, bis er mit dem unbeweglichen Schenkel zusammen fällt, so hat jener Schenkel den ganzen Raum um den Punkt herum durchlaufen; es ist nun kein Winkel mehr vorhanden, oder ich müßte den ganzen, um den Punkt herum liegenden Raum einen Winkel von 4 R nennen.

Zusatz. Die Aufgabe in Nro. 34 kann noch allgemeiner gestellt werden, indem man auch flache Winkel (= 2 R) zuläßt. (Ein flacher Winkel ist freilich nur uneigentlich ein Winkel.) Die Frage ist dann: Wie viel erhabene, flache und hohle (rechte, stumpfe und spitze) können um einen Punkt herum liegen? Folgende Darstellung enthält die Antwort:

1) 1 erhab. W. + 1 hohler W. { 1 R. / 1 stumpf. / 1 oder viele spitze.

2) 2 flache W.

1 flacher W. + 2 hohle: { 2 R. / 1 stumpfer + 1 spitzer.

1 flacher + 3 hohle W.: { 1 st. + 2 sp. / 1 R + 2 sp. / 3 sp.

3) 3 hohle: { 3 st. / 2 st. + 1 R. / 2 st. + 1 sp.

Digitized by Google

4) 4 hohle: { 4 R. / 2 R + 1 st. + 1 sp. / 1 R + 2 st. + 1 sp. / 1 R + 1 st. + 1 sp. / 3 st. + 1 sp. / 2 st. + 2 sp. / 1 st. + 3 sp.

5) 5 hohle ꝛc. ꝛc.

35. Geht von einem Punkte eine gewisse Anzahl Strahlen aus, so, daß keine zwei derselben in einer g. L. liegen, so bildet jeder Strahl mit jedem einen erhabenen Winkel. Wären der Strahlen n, so bildete jeder $(n-1)$ erhabene Winkel; n Strahlen also $n.(n-1)$ erhabene Winkel. Hiermit ist aber jeder erhabene Winkel doppelt gezählt. Die Anzahl aller erhabenen Winkel ist folglich $= \frac{n.(n-1)}{2}$.

36. Wenn sich n g. L. in demselben Punkte durchschneiden, so ist die Zahl aller Strahlen $= 2n$. Da jeder Strahl mit einem andern in g. L. liegt, mit welchem er also keinen hohlen und keinen erhabenen Winkel bildet, so macht also jeder Strahl mit jedem der übrigen, weniger einen, einen hohlen und einen erhabenen Winkel, also 2 Winkel, d. h. jeder der 2n Strahlen bildet mit $(2n-2)$ Strahlen Winkel und mit jedem 2, von welchen die Hälfte hohl, die Hälfte erhaben ist; jeder Strahl bildet also $2(2n-2)$ Winkel; 2n Strahlen also $2n.2(2n-2)$ hohle und erhabene Winkel zusammen. Nun ist aber, da jeder Winkel 2 Schenkel hat, jeder vorhandene Winkel zweimal gezählt. Die Gesammtzahl aller hohlen und erhabenen Winkel ist also $= \frac{2n.2(2n-2)}{2} = 2n(2n-2)$.

Ist die Zahl der sich durchschneidenden Linien

$= 2$, so hat man also $2.2.(2.2-2) =$ 8 hohle u. erh. W. zus.
$= 3$, " " " " $2.3.(2.3-2) =$ 24 " " " " "
$= 4$, " " " " $2.4.(2.4-2) =$ 48 " " " " "
$= 5$, " " " " $2.5.(2.5-2) =$ 80 " " " " "
$= 6$, " " " " $2.6.(2.6-2) =$ 120 " " " " "

37. Daß von allen Winkeln, welche in derselben Ebene um einen Punkt herum liegen mögen, nur ein einzelner Winkel ein erhabener sein könne, ist schon weiter oben gezeigt worden.

38. Denke ich mir zwei Parallelen von einer dritten g. L. durchschnitten (Fig. 40), so bemerke ich Folgendes, nach der Vielheit geordnet: 1 Linienverbindung — 1 durchscheidende Linie; 2 Parallelen — 2 Durchschnittspunkte, — 2 Paare außerhalb der Parallelen, auf derselben Seite der schneidenden Linie,

Digitized by Google

liegende Winkel; 2 Paare innerhalb der Parallelen, auf derselben Seite der schneidenden Linie liegende Winkel — 2 Paare außerhalb der Parallelen, auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegende Winkel — 2 Paare innerhalb der Parallelen, auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegende Winkel; 3 g. L.; 4 außerhalb und 4 innerhalb der Parallelen liegende Winkel — 4 Paare Scheitelwinkel — 4 rechts und 4 links von der schneidenden Linie liegende Winkel; 6 Endpunkte — 6 abgesonderte Theile der Ebene, in welcher die Linien liegen; 7 g. L., von welchen jede zwischen 2 Punkten liegt; 8 Strahlen — 8 Winkel — 8 Paare Nebenwinkel u. s. w.

59. Die vorhergehende Betrachtung wurde vorzüglich deßwegen vorgenommen, damit der Schüler Wechsel- und Gegenwinkel auffinde.

Wechselwinkel sind solche, welche auf entgegengesetzten Seiten einer zwei andere g. L. durchschneidenden Linie, entweder beide außerhalb, oder beide innerhalb der Parallelen liegen, ohne Neben- und Scheitelwinkel zu sein. Es giebt also äußere und innere Wechselwinkel. In Fig. 40 sind m und y, n und x äußere, o und u, p und v innere Wechselwinkel zu einander.

Gegenwinkel sind solche Winkelpaare, welche auf derselben Seite der schneidenden Linie, der eine außerhalb, der andere innerhalb der Parallelen, liegen, ohne Nebenwinkel von einander zu sein. n und u, y und p sind die Gegenwinkel der einen, m und v, x und o die Gegenwinkel der andern Seite der schneidenden Linie.

Aus diesen Erklärungen geht hervor, daß, um Wechsel- und Gegenwinkel zu haben, die 2, von einer dritten durchschnittenen, geraden Linien nicht gerade parallel zu sein brauchen. Auch Fig. 41 stellet Wechsel- und Gegenwinkel dar.

§. 12. Figur.

1. Eine Figur entsteht dadurch, daß eine Fläche überall eine Gränze erhält. Da die Linie die Gränze der Fläche bildet, so ist jede Figur von einer oder mehreren Linien begränzt.
2. Eine Figur ist also eine auf allen Seiten oder ringsum begränzte Fläche.
3. Der Begriff »Fläche« ist dem Begriffe »Figur« übergeordnet. Jede Figur ist eine Fläche; einige (manche, gewisse) Flächen sind Figuren.

Digitized by Google

4. In Ansehung der Form der Fläche giebt es krummflächige, geradflächige oder ebene und gemischtflächige Figuren; in Betreff der Form der die Figuren begränzenden Linien hat man krummlinige, geradlinige und gemischtlinige Figuren; in Hinsicht der Zahl der die Figur begränzenden Linien (Seiten genannt) sind die Figuren einseitig, zweiseitig, drei-, vier- und mehrseitig oder überhaupt vielseitig. Die geradlinigen Figuren sind in Betreff der Größe der Winkel entweder hohlwinklige mit lauter hohlen Winkeln, oder erhaben-hohlwinklige Figuren, welche theils hohle, theils erhabene Winkel enthalten.

5. Unter Umring, Umfang oder Perimeter einer Figur versteht man die Gränzlinien derselben.

6. In jeder geradlinigen Figur ist die Anzahl der Seiten der Anzahl ihrer Winkel gleich. Eine geradlinige dreiseitige Figur ist daher auch eine geradlinige dreiwinklige, eine geradlinige n seitige Figur auch eine geradlinige n winklige. Dasselbe ist der Fall mit jeder Figur, welche nicht von einer (krummen) Linie begränzt ist.

7. Die 3, 4, 5, n seitige oder -winklige Figur wird von 3, 4, 5, n Linien gebildet.

8. Jede dreiseitige Figur hat 3 Seiten, 3 Winkel und eine Fläche. Man kann daher in ihr $2.3 + 1 = 7$ Stücke der Betrachtung unterwerfen.

   In der 4 seitigen Figur: $2.4 + 1 = 9$ Stücke
   " " 5 " " $2.5 + 1 = 11$ "
   " " 6 " " $2.6 + 1 = 13$ "
   " " n " " $2.n + 1$ ", wobei vorausgesetzt wird, daß $n > 1$ sei.

9. In der 3 seitigen Figur steht jeder Seite ein Winkel, und jedem Winkel eine Seite gegenüber. Dasselbe gilt von der 5, 7, 9, 11 seitigen Figur, überhaupt von allen Figuren, deren Zahl der Seiten eine ungerade (unpaare) Zahl ist.

10. Regelmäßig oder regulär heißen diejenigen Figuren, in welchen alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind.

11. Das mechanische Zeichnen der regelmäßigen Figuren, welches mit Lineal und Zirkel geschieht, ist für den Schüler wichtig, damit sich dessen Hand und Auge übe. Anfängern kann man zuerst in Pappendeckel ausgeschnittene regelmäßige Figuren hingeben, sie auffordernd, dieselben auf ihren Tafeln zu umziehen u. s. w.

12. In den regulären Figuren von unpaarer Seitenzahl steht jeder Seite ein Winkel, und in den regulären Figuren von gerader oder paarer Seitenzahl steht jeder Seite eine Seite, und jedem Winkel ein Winkel gegenüber.

Digitized by Google

13. In jeder geradlinigen Figur ist **eine** Seite allein kleiner als die übrigen Seiten zusammen genommen, weil eine g. L. der kürzeste Weg ist von einem Punkte zum andern.

Nur in krumm- oder gemischtlinigen Figuren ist es möglich, daß **eine** Seite gleich oder größer sei, als die übrigen Seiten zusammen.

14. Die Seiten des Vierecks sind entweder

alle gerade, oder
3 gerade 1 krumm
2 = 2 =
1 = 3 =
0 = 4 =
} 5 Fälle.

Die Seiten der fünfseitigen Figur (des Fünfecks oder besser des **Fünfseits**):

5 gerade 0 krumm
4 = 1 =
3 = 2 =
2 = 3 =
1 = 4 =
0 = 5 =
} 6 Fälle.

Die Seiten des n seits:

n gerade 0 krumm
(n−1) = 1 =
(n−2) = 2 =
(n−3) = 3 = u. s. w. bis n−x=0 ist.

Also (n+1) Fälle.

15. Es soll hier untersucht werden, auf wie mancherlei Weise man eine g. L. in ein 3, 4, 5eck gelegt denken kann, daß die Figur jedesmal anders getheilt wird. Will ich eine g. L. durch ein Dreieck (△) ziehen, so kann ich dieselbe entweder durch einen Winkelpunkt, oder durch keinen Winkelpunkt des △ gehen lassen. Im ersten Falle wird das △ in 2 ∠△, im andern Falle in ein △ und in ein 4eck zerlegt (Fig. 42).

Lege ich eine g. L. auf alle mögliche Weisen in ein Vierseit, so geht die g. L. entweder durch 2 Winkelpunkte, oder durch 1 Winkelpunkt, oder durch keinen Winkelpunkt des Vierseits. In letzterem Falle verbindet die g. L. entweder 2 an einander liegende, oder 2 einander gegenüber liegende Seiten des Vierseits. Es finden also 4 Fälle statt (Fig. 43). Die Figuren zeigen anschaulich, in was für Figuren das Vierseit in jedem dieser 4 Fälle zertheilt wird.

Die möglichen Zertheilungsweisen des Fünf- oder Mehrseits sind leicht aufzufinden. Die des Fünfseits macht Fig. 44 anschaulich. — Man muß den Schüler anhalten, daß er nicht

Digitized by Google

bloß versuchsweise (empirisch), sondern nach irgend einer Vorstellung, einem Eintheilungsgrunde, verfahre.

16. Soll untersucht werden, was für Figuren dadurch entstehen, daß man 2 g. L. auf möglichst verschiedene Weise in ein △ hinein legt, so thut man am besten, wenn man zuerst obige 2 Fälle, welche mit einem △ und einer Linie statt finden, vornimmt, und dann die zweite Linie auf möglichst verschiedene Weise in die 2 △△ legt.

Fig. 45. Die beiden Fälle, welche ein △ und 1 g. L. giebt, sind in Fig. 42 verzeichnet. Zuerst nehme ich den ersten Fall vor. Wenn ich eine zweite Linie in dieses △ legen soll, so kann dieselbe entweder von einem Winkelpunkte der Figur ausgehen, oder nicht. Ist jenes, so ist dieß entweder der Punkt b, oder a, oder c, oder d. Dieß giebt 3 Fälle, Fig. 45, 1, 2 und 3. Nun nehme ich den zweiten der Fälle in Fig. 42 vor. Hier kann die zweite Linie entweder von einem Winkelpunkte aus in das △ gelegt werden und dann ist es entweder a, oder b, oder c, oder d, oder e (3 Fälle); oder sie gehe durch keinen Winkelpunkt, und dann geht sie entweder von einem Punkte in der Linie ad oder db oder bc (auch 3 Fälle).

Geht sie durch den Winkelpunkt a, so entsteht F. 45, 4.

= = = = = b, so entstehen = 5 u. 6.
= = = = = d, = = = 7, 8 u. 9.
= = von der Line ad aus = = = 10, 11 u. 12.
= = = = = db = = = 13, 14 u. 15.
= = = = = bc = = = 16, 17 u. 18.

Vergleicht man die vorstehenden Figuren unter einander, in wiefern sie dieselben Figuren in Ansehung ihrer Anzahl und der Zahl ihrer Seiten aufstellen, so findet man:

Nur Dreiecke werden gebildet in den Figuren 1, 3 und 8, jedesmal 3.

Dreiecke und Vierecke liegen in den Figuren 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 17, 18.

Vierecke allein kommen in keiner Figur vor.

Dreiecke und Fünfecke finden sich in 11 und 13.

Dreiecke, Vierecke und Fünfecke in den Figuren 11 u. 13.

Ganz gleich in Ansehung der Zahl der Figuren und der Anzahl ihrer Seiten, nur nicht in Hinsicht der Lage sind also die Figuren 1, 3, 8.

= = = 4, 6.
= = = 5, 7, 9.
= = = 10, 14.
= = = 12, 17, 18.
= = = 15, 16.
= = = 11, 13.

Allein die Figur 2 hat keine ihr gleiche Figur.

Digitized by Google

Der möglichst verschiedenen Fälle in Ansehung der Anzahl der Figuren und ihrer Seitenzahlen giebt es also überhaupt 8. Daher können durch 2 g. L., welche man beliebig in ein △ gelegt denken kann, gebildet werden:

3	Dreiecke							
2	=	und	2	Vierecke				
2	=	=	1	Viereck				
1	=	=	2	Vierecke				
1	=	=	3	=				
2	=	=	0	=	und	1	Fünfeck	
2	=	=	1	=	=	1	=	
3	=	=	1	=	.		.	

17. Anstatt diese Aufgabe in ihrer Allgemeinheit, was gar keine Schwierigkeiten darbietet, zu behandeln,*) wollen wir den einzelnen Fall derselben hier aufstellen, indem wir fragen: In wie vielen Punkten können die Umringe zweier Triangel einander durchschneiden?

Dieses kann geschehen in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten, wie Fig. 46 von 1 bis 6 dieses anschaulich zeigt.

18. Diagonallinie oder Diagonale oder Gere heißt jede g. L., welche zwei, nicht durch eine g. L. mit einander verbundene Winkelpunkte einer Figur durch eine g. L. verbindet.

19. Aus der vorstehenden Erklärung folgt, daß in einem Dreiseit keine Diagonale gezogen werden kann, weil alle 3 Winkelpunkte desselben schon durch die Seiten des △ selbst mit einander verbunden sind. In jedem Vierseit können 2 Geren gezogen werden; selbst in den Vierseiten mit einem erhabenen Winkel, in welchen eine Gere außerhalb des Vierseits fällt.

Um die Anzahl der Geren in jeder geradlinigen Figur und die allgemeine Regel zu finden, stellen wir folgende Ueberlegung an. Eine geradlinige Figur hat so viele Winkelpunkte, als Seiten und Winkel. Jeder Winkelpunkt ist schon mit zweien andern durch Linien verbunden; es bleiben also der Punkte, mit welchen derselbe noch durch Geren verbunden werden kann, so viele übrig, als die Figur Seiten hat, weniger 3. Hätte die Figur n Seiten, so könnte man aus jedem Punkte (n — 3) Geren ziehen; aus n Punkten also n.(n—3). Da jede Gere zwei Winkelpunkte verbindet, so muß das eben angegebene Produkt durch 2 getheilt werden, um die möglich höchste Anzahl aller Geren zu erhalten, welche also durch die Formel $\frac{n.(n-3)}{2}$ ausgedrückt wird. In Worten: Um die

*) Wie solches in meiner Geometrischen Combinationslehre, Elberfeld 1820, §. 36, geschehen ist.

Digitized by Google

möchlich höchste Anzahl Geren, welche in einer geradlinigen Figur gezogen werden können, zu finden, multiplicire man die um 3 Einheiten verminderte Zahl aller Seiten mit der Zahl der Seiten und theile dieses Produkt durch 2. Möglich sind also in

einem Dreiseit $\frac{3 \cdot (3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0$ Geren

= Vierseit $\frac{4 \cdot (4-3)}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$ =

= Fünfseit $\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ =

= Sechsseit $\frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ =

= Siebenseit $\frac{7 \cdot (7-3)}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ =

u. s. w.

20. Um die umgekehrte Aufgabe aufzustellen, muß die möglich höchste Anzahl aller Geren, welche in einer geradlinigen Fig. von unbekannter Seitenzahl gezogen werden können, gegeben sein und verlangt werden, daraus die Anzahl der Seiten der Figur zu finden.

Aus der vorhergehenden Auflösung geht hervor, daß die Zahl der Geren die Hälfte eines Produkts ist, welches deßhalb gefunden wird, wenn ich die Zahl der Geren verdoppele Diese doppelte Zahl der Geren ist durch die Multiplication zweier Zahlen entstanden, welche um 3 Einheiten von einander verschieden sind. Ich brauche daher nur diese beiden Zahlen zu suchen, was durch den leichtesten Versuch gelingt; alsdann zeigt mir die größere dieser Zahlen die gesuchte Zahl der Seiten der Figur an.

Beispiel. Die Anzahl der Geren sei = 27.

Auflösung. $2.27 = 54$; $54 = 9.6$. Also ist die Figur eine neunseitige.

21. Die Aufgabe Nro. 19 kann auch sehr leicht vermittels der Aufgabe: die höchste Anzahl g. L. zwischen einer gegebenen Anzahl von Punkten zu finden, gelöset werden. Denn man braucht nur die möglich höchste Anzahl aller g. L. zwischen den n Winkelpunkten des gegebenen nseits zu suchen, und von dieser Anzahl die Zahl der Seiten der Figur, nämlich n, abzuziehen, so bleibt die Anzahl der Geren übrig. Nun sind (nach §. 9, Nro. 9) zwischen n Punkten $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ g. L. möglich; davon n abgezogen, so bleibt für die Zahl der Geren der Ausdruck übrig:

Digitized by Google

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot n - n}{2} - \frac{2n}{2}$$
$$= \frac{nn - 3n}{2}$$
$$= \frac{n \cdot (n-3)}{2},$$

welches die in Nro. 19 gefundene Formel ist.

22. I. Zieht man in einer geradlinigen Figur alle möglichen Diagonalen, so entsteht eine gewisse Anzahl von Dreiecken, welche von den Seiten und den Diagonalen gebildet werden. Man verlangt die Anzahl dieser Figuren zu wissen. Hieraus folgt, daß nicht die Rede ist, von den Dreiecken, welche von den Theilen der Diagonalen gebildet werden, sondern nur von solchen, welche Seiten der Figur und ganze Diagonalen, oder auch Diagonalen allein zu Seiten haben.

Betrachten wir zu dem Ende z. B. ein Sechseck (Fig. 47), so lehrt der Augenschein, daß »je 3« Winkelpunkte der Figur Spitzen eines Dreiecks werden. So vielfach also die 6 Punkte des Sechsecks zu »je 3« zusammengestellt werden können, so viele Dreiecke sind möglich. Fangen wir diese Untersuchung mit 3 Punkten, welche a, b, c heißen mögen, an. Diese lassen sich nur 1mal zu 3 verbinden, nämlich abc.

4 Punkte a b c d

abc	abd	acd	bcd

also 4 Dreiecke.

5 Punkte a b c d e

abc	abd	abe
	acd	ace
		ade
	bcd	bce
		bde
		cde

10 Dreiecke

6 Punkte a b c d e f

abc	abd	abe	abf
	acd	ace	acf
		ade	adf
			aef
	bcd	bce	bcf
		bde	bdf
			bef
		cde	cdf
			cef
			def

20 Dreiecke.

Wer mit der arithmetischen Combinationslehre nicht bekannt ist, möge sich mit dieser Auflösung begnügen und dieselbe nach Gefallen weiter fortsetzen. Der der Combinationslehre Kundige weiß, daß es in vorstehender Aufgabe darauf ankommt, die Anzahl der Gedreie oder Ternen zu berechnen, welche mit einer gegebenen Anzahl Größen gebildet werden können. Dieses leistet für n Größen die Formel:

Digitized by Google

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Anmerkung. Allgemeiner ist diese Aufgabe behandelt in meiner Combinationslehre §. 38.

II. Werden nur solche Diagonalen gezogen, welche einander nicht durchschneiden, d. h. alle diejenigen, welche aus demselben Winkelpunkte möglich sind, so entsteht eine viel geringere Anzahl Dreiecke. Leicht wird man bemerken, daß 2 dieser Dreiecke 2 Seiten der Figur, jedes der übrigen Dreiecke aber nur 1 Seite der Figur zur Seite hat. Daraus folgt, daß nicht so viele Dreiecke entstehen, als die Figur Seiten hat, sondern 2 weniger. Unter der angegebenen Bedingung entstehen also

im 4eck : 4 — 2 = 2 △△
= 5 = : 5 — 2 = 3 =
= 6 = : 6 — 2 = 4 =
= n = : n — 2 =

23. Die umgekehrte Aufgabe der zuletzt gelöseten ist: In einer geradlinigen Figur sind alle, einander nicht durchschneidenden Geren gezogen; die Anzahl der dadurch gebildeten △△ ist gegeben; wie groß ist die Anzahl der Seiten der Figur?

Antwort. Um 2 größer als die gegebene Anzahl der △△.

24. Vergleicht man die gegenseitige Größe der Seiten eines geradlinigen △, so findet man, daß dieselben entweder unter einander gleich, oder daß nur 2 unter einander gleich, oder daß alle ungleich sind.

25. Ebenso lehrt die Anschauung, daß die 3 Winkel des geradlinigen △ entweder alle gleich, oder nur 2 gleich, oder alle unter einander ungleich sind.

26. Wenn ich den drei Arten der geradlinigen Dreiecke in Ansehung ihrer möglichen Seitenverschiedenheit, dem gleichseitigen, gleichschenkligen und ungleichseitigen △, die drei Arten der geradlinigen Dreiecke in Ansehung der möglichen Winkelverschiedenheit, das gleichwinklige, das Dreieck mit 2 gleichen Winkeln und das ungleichwinklige, gegenüber stelle, um jene drei Arten mit diesen zusammen zu stellen, zu verbinden (zu combiniren), so ergeben sich, abgesehen von ihrer Möglichkeit oder Unmöglichkeit, folgende 9 Combinationen:

1. das gleichseitige gleichwinklige △;
2. = = mit 2 gleichen Winkeln;
3. = = ungleichwinklige;
4. = gleichschenklige gleichwinklige △;
5. = = mit 2 gleichen Winkeln;
6. = = ungleichwinklige;

Digitized by Google

7. das ungleichseitige gleichwinklige △;
8. = = mit 2 gleichen Winkeln;
9. = = ungleichwinklige △.

Nun soll untersucht werden, welche dieser Verbindungen einen innern Widerspruch enthalten, und welche nicht. Diese Aufgabe wird an das innere Anschauungsvermögen gerichtet, welchem die äußere Anschauung passend gezeichneter △△ zu Hülfe kommen mag. Auch das, noch nicht sehr geübte Anschauungsvermögen wird folgende Resultate finden.

1. Das gleichseitige △ ist auch jederzeit gleichwinklig, und das gleichwinklige jederzeit gleichseitig. Die Gleichseitigkeit zieht die Gleichheit aller Winkel, und umgekehrt die Gleichwinkligkeit die Gleichheit der Seiten herbei. Das eine Merkmal ist nie ohne das andere. Ich brauche also nicht zu sagen: das gleichseitige gleichwinklige △, da es sich von selbst versteht, daß beide Eigenschaften mit einander vereinigt seien.

2 u. 3. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß ein gleichseitiges △, da es 3 gleiche Winkel hat, auch stets 2 einander gleiche Winkel hat; daß aber kein △ möglich sei, welches gleichseitig ist, und in welchem nur 2 Winkel einander gleich, oder in welchem alle Winkel ungleich sind. Ein gleichseitiges △ mit nur 2 gleichen, oder mit ungleichen Winkeln gehört zu den Undingen, da diese Merkmale einander widersprechen.

4. Die Anschauung belehrt uns, daß in einem △, welches 2 gleiche Seiten hat, auch 2 gleiche Winkel liegen, und zwar diejenigen, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen, oder welche an der dritten ungleichen Seite liegen. Aber mehr als 2 gleiche Winkel befinden sich in einem △, welches nur 2 gleiche Seiten hat, nicht.

Die Ausdrücke: gleichschenkliges gleichwinkliges △ und gleichschenkliges ungleichwinkliges △ enthalten also einander widersprechende, nicht mit einander vereinbare Merkmale. Ihnen liegt kein möglicher (und darum auch kein wirklicher) Begriff zu Grunde; sie sind (logische) Undinge.

5. Eben so leicht ist es zu erkennen, daß ein △ mit lauter ungleichen Seiten keine gleichen Winkel enthalten könne. Auch die Ausdrücke: ungleichseitiges gleichwinkliges △, ungleichseitiges △ mit 2 gleichen Winkeln, nennen Undinge. Nur dem Ausdrucke: ungleichseitiges ungleichwinkliges △ entspricht eine (mögliche und darum wirkliche) Vorstellung. Doch ist ein solches △ hinlänglich durch den Ausdruck: ungleichseitiges △ oder ungleichwinkliges △ bezeichnet, weil das ungleichseitige △ ungleichwinklig, und das ungleichwinklige ungleichseitig ist.

Digitized by Google

Von den oben aufgestellten 9 Combinationen bleiben daher nur folgende als solche, welche Wirklichkeit (Realität) haben, übrig:

das gleichseitige △ oder das gleichwinklige △;
das gleichschenklige △ oder das △ mit 2 gleichen W.;
das ungleichseitige △ oder das △ mit 3 ungleichen W.

Dargestellt werden sie durch die Figuren Nro. 48.

27. Eine regelmäßige Figur ist eine solche, deren Seiten und deren Winkel einander gleich sind. Folglich ist das gleichseitige △ das regelmäßige.

28. Im gleichseitigen △ sind alle, im gleichschenkligen △ 2 W. einander gleich.

29. Im gleichwinkligen △ sind alle Seiten, in dem △, welches 2 gleiche Winkel hat, sind 2 Seiten, nämlich die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden, einander gleich.

30. Im gleichseitigen △ sind alle Winkel, im gleichwinkligen sind alle Seiten einander gleich.

31. Aendert sich die Größe eines Winkels in einem △, ohne daß die Größe der beiden, diesen Winkel einschließenden Seiten sich ändert, so ändert sich auch zugleich die Größe der, diesem Winkel gegenüber stehenden Seite. Und ändert sich in einem △ die Größe einer Seite, ohne daß die Größe der andern Seiten sich ändert, so wird auch die Größe des, dieser Seite gegenüber liegenden Winkels eine andere.

Die Seiten eines △ und die ihnen gegenüber stehenden Winkel stehen zu einander in einem gewissen Verhältnisse.

32. Dasjenige Viereck ist regelmäßig, dessen Seiten und dessen Winkel einander gleich sind. Dieses Viereck heißt Quadrat oder auch Geviert.

33. Werden 2 gleichlaufende gerade Linien von zweien andern, unter sich gleichlaufenden, Linien durchschnitten, so entsteht eine Figur, welche man Parallelogramm nennt.

34. Nothwendig sind in einem Parallelogramme je zwei einander gegenüber stehende Seiten unter sich gleich. Aber nicht nothwendig sind alle Seiten einander gleich. Eben so findet unter je 2 einander gegenüber stehenden Winkeln des Parallelogramms Gleichheit statt; nicht aber sind nothwendig alle Winkel des Parallelogramms einander gleich. Die verschiedenen Arten der Parallelogramme sind also folgende:

1. das Parallelogramm, dessen Seiten und dessen Winkel einander gleich sind; das regelmäßige Viereck, das Quadrat;

2. das Parallelogramm mit lauter gleichen Seiten, dessen Winkel nicht alle unter einander gleich sind; die Raute oder der Rhombus;

Digitized by Google

3. das Parallelogramm, dessen Winkel zwar alle, dessen Seiten aber nicht alle einander gleich sind; das Rechteck oder das Rektangel;

4. das Parallelogramm, dessen Seiten und dessen Winkel nicht alle unter einander gleich sind; der Rhomboides. — (Fig. 49.)

35. Ein Parallelogramm ist eine vierseitige Figur, deren gegenüber stehende Seiten einander gleich sind.

Quadrat heißt dasjenige Parallelogramm, das lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat, oder das regelmäßige Viereck.

Rechteck wird dasjenige Parallelogramm genannt, dessen Winkel, aber dessen Seiten nicht alle, einander gleich sind.

Raute ist dasjenige Parallelogramm, dessen Seiten zwar, dessen Winkel aber nicht einander gleich sind.

Rhomboides wird dasjenige Parallelogramm genannt, dessen Seiten und dessen Winkel nicht einander gleich sind. — Daß in jedem Parallelogramme, also auch im Rhomboides die Seiten und Winkel, nämlich die einander gegenüber stehenden, paarweise gleich sind, ist schon oben gefunden worden.

36. Sehr leicht ist es nun, die gemeinsamen und unterscheidenden Merkmale der 4 Arten der Parallelogramme anzugeben.

Quadrat und Rechteck haben das gemeinsame Merkmal der Gleichheit aller Winkel, und das unterscheidende, daß im Quadrate auch alle Seiten, im Rechtecke nicht alle Seiten gleich sind.

Quadrat und Raute kommen in dem Merkmale der Gleichheit aller Seiten mit einander überein, unterscheiden sich aber dadurch von einander, daß das Quadrat gleich-, die Raute nicht gleichwinklig ist.

Quadrat und Rhomboides haben weiter kein Merkmal mit einander gemein, als daß beide Parallelogramme sind, daß also in beiden die einander gegenüber stehenden Seiten- und Winkelpaare gleich sind. Gleichseitigkeit und Gleichwinkligkeit findet im Quadrate, nicht aber im Rhomboides statt.

Rechteck und Raute haben nur das gemeinsame Merkmal, daß beide Parallelogramme sind. Im Uebrigen sind beide einander entgegengesetzt, da die Winkel des Rechtecks einander gleich, die Seiten desselben (paarweise) ungleich, dagegen die Seiten der Raute einander gleich, die Winkel (paarweise) ungleich sind.

Rechteck und Rhomboides sind beide Parallelogramme, und in beiden sind nicht alle Seiten einander gleich. Die Winkel des Rechtecks sind einander gleich, was von denen des Rhomboides nicht gilt.

Digitized by Google

Raute und Rhomboides haben das gemeinsame Merkmal der Nicht-Gleichheit aller Winkel. Verschieden sind sie darin, daß alle Seiten der Raute einander gleich, die des Rhomboides nur paarweise gleich sind.

37 u. 38. Trapez oder Trapezium heißt jedes Viereck, in welchem die einander gegenüber stehenden Seiten nicht parallel sind; Parallel-Trapez heißt dasjenige Viereck, in welchem ein Paar paralleler Seiten liegt.

39. In einem geradlinigen △ kann kein erhabener Winkel liegen; in einem Vierecke einer, im Fünfecke 2, im Sechsecke 3, im Siebenecke 4, im Allgemeinen im necke (n — 3). Der Grund, warum höchstens so viele erhabene Winkel in einer geradlinigen Figur liegen können, als die Figur Seiten hat, weniger 3, springt aus der Anschauung der Figuren in die Augen. Also hat jede geradlinige Figur wenigstens 3 hohle Winkel. Siehe Fig. 50!

40. Umgekehrt, wenn die höchste Anzahl converer Winkel einer geradlinigen Figur = n ist, so hat diese Figur n+3 Seiten.

41. Wir fangen mit der kleinsten Anzahl g. L. an. 3 g. L. durchschneiden einander in 3 Punkten; sie bilden 1 Dreieck — 1 Fig.

Eine vierte g. L. durchschneidet die vorhergehenden 3 g. L. und bildet 2 neue Figuren — also 1 + 2 = 3 Figuren.

Eine fünfte g. L. kann die früheren 4 g. L. durchschneiden, und es entstehen dadurch möglicher Weise 3 neue Figuren — 1 + 2 + 3 = 6 Figuren.

Eine sechste g. L. durchschneidet die vorhergehenden 5 L., und es entstehen auf's neue 4 Figuren — 1+2+3+4 = 10 Figuren.

So entstehen durch die siebente Linie 5 neue Figuren. Ueberhaupt giebt es jedesmal durch eine hinzukommende Linie so viele neue Figuren, als schon g. L. da waren, weniger 1. Denn zwischen 6 g. L. liegen 5 Zwischenräume; diese können durch die siebente g. L. geschlossen werden; es entstehen also 5 neue Figuren. Tritt die nte g. L. hinzu, so schließt diese möglicher Weise die Zwischenräume, welche von (n — 1) g. L. gebildet werden, deren (n — 2) sind.

3 g. L. bilden also 1 ungetheilte Figur;

4	=	=	= 1+2=3	ungetheilte Figuren.
5	=	=	= 1+2+3=6	= =
6	=	=	= 1+2+3+4=10	= =
7	=	=	= 1+2+3+4+5=15	= =
n	=	=	= 1+2+3 . . . . +(n—3)+(n—2).	

Wird die letztere Reihe arithmetisch summirt, so erhält man zur Summe des ersten und letzten Gliedes n — 2 + 1 = (n — 1), und multiplicirt man diese Summe mit der

Digitized by Google

halben Anzahl der Glieder, d. h. mit $\frac{(n-2)}{2}$, so erhält man die Formel $\frac{(n-1).(n-2)}{2}$, welche die höchste Anzahl aller ungetheilten Figuren, welche von n g. L. gebildet werden, angiebt.

7 g. L. bilden also $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ ung. Figuren (F. 51).

9 = = = $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ = =

20 = = = $\frac{19 \cdot 18}{2} = 171$ = =

u. s. w.

42. Soll die Anzahl aller möglichen, getheilten und ungetheilten △△. welche von einer gegebenen Anzahl g. L. gebildet werden mögen, gefunden werden, so überlege man, daß jede g. L. jede andere durchschneiden kann. Ist die Zahl der Linien = n, so liegen in jeder Linie auf diese Weise (n—1) Punkte; zwischen (n - 1) Punkten liegen $\frac{(n-1).(n-2)}{2}$ Strecken; über jeder Strecke liegt ein △, weil alle g. L. einander durchschneiden; also liegen über jeder g. L. $\frac{(n-1).(n-2)}{2}$ Dreiecke; über n g. L. also $\frac{n.(n-1).(n-2)}{2}$ Dreiecke. Da aber jedes △ drei Seiten hat, so ist durch diese Formel die Anzahl aller △△ 3mal gezählt; dieselbe muß also noch durch 3 getheilt werden. Man erhält demnach zur Angabe aller möglichen, entstandenen △△ den Ausdruck $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Die Zahl aller △△ ist also:

bei 3 g. L. $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$

= 4 = $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$

= 5 = $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$

= 6 = $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$

= 10 = $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$

u. s. w.

43. Werden 2 Parallelen von 2 andern, unter sich parallelen g. L. durchschnitten, so entsteht 1 Parallelogramm. Sind der Parallelen, welche von den 2 Parallelen durchschnitten werden:

Digitized by Google

3, so entstehen 2 ungetheilte Parallelogramme;
4, " " 3 " "
5, " " 4 " " (Fig. 52)
n, " " (n−1) " "

44. Soll die Anzahl der getheilten und ungetheilten Parallelogramme unter der Bedingung der vorhergehenden Nummer berechnet werden, so überlege man, daß zwischen »je zweien« Parallelen ein Parallelogramm liegt. Von jeder der Parallelen aus kann man, wenn die Zahl derselben n heißt, (n—1) Parallelogramme zählen; von n Parallelen aus also n.(n—1) Parallelogramme. Da aber hierdurch jedes Parallelogramm 2mal gezählt ist, so ist die Zahl aller Parallelogramme $= \frac{n.(n-1)}{2}$. Auf diese Art entstehen:

durch 2 Parallelen $\frac{2 \cdot (2-1)}{2} = 1$ Parallelogr.
" 3 " $\frac{3 \cdot (3-1)}{2} = 3$ "
" 4 " $\frac{4 \cdot (4-1)}{2} = 6$ "
" 10 " $\frac{10 \cdot (10-1)}{2} = 45$ "

u. s. w.

45. Wird eine gewisse Anzahl Parallelen, z. B. 5, durch 3 g. L. durchschnitten (Fig. 53), so wollen wir jene zuerst von 2 Parallelen durchschnitten denken. Die dadurch entstandene Anzahl aller Parallelogramme ist $= \frac{5 \cdot 4}{2}$.

Kommt zu den 2 durchschneidenden Parallelen noch eine dritte, so entstehen diese $\frac{5 \cdot 4}{2}$ Parallelogramme so oft, als Zwischenräume zwischen 3 g. L. liegen. Zwischen 3 g. L. liegen, wie bekannt, $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ Zwischenräume. Es giebt also in Allem: $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 10.3 = 30$ Parallelogramme.

46. Nehmen wir nun im Allgemeinen an, daß p Parallelen von q andern Parallelen durchschnitten werden, so ist zu bedenken, daß zwischen p Parallelen $\frac{p \cdot (p-1)}{2}$ Zwischenräume liegen. Diese Zwischenräume werden so oft geschlossen, als sich zwischen q Parallelen Zwischenräume befinden, deren $\frac{q \cdot (q-1)}{2}$ sind. Und eben so oft mal entstehen $\frac{p \cdot (p-1)}{2}$ Parallelogramme.

Digitized by Google

Die Anzahl aller getheilten und ungetheilten Parallelogramme für p Parallelen, welche von q Parallelen durchschnitten werden, ist also: $\frac{p \cdot (p-1)}{2} \times \frac{q \cdot (q-1)}{2}$.

Ist z. B. $p=4$ u. $q=3$, so entst. $\frac{4 \cdot 3}{2} \times \frac{3 \cdot 2}{2} = 6.3 = 18$ Parall.

$p=4$ • $q=4$ • $\frac{4 \cdot 3}{2} \times \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.6 = 36$ •

$p=6$ • $q=5$ • $\frac{6 \cdot 5}{2} \times \frac{5 \cdot 4}{2} = 15.10 = 150$ •

$p=10$ • $q=10$ • $\frac{10 \cdot 9}{2} \times \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.45 = 2025$ •

u. s. w.

47. Nach der vorhergehenden Auseinandersetzung ist die Anzahl Parallelogramme, welche entstehen, wenn 6 Parallelen von 4 in anderer Richtung parallel laufenden g. L. durchschnitten werden, $= \frac{6 \cdot 5}{2} \times \frac{4 \cdot 3}{2} = 15.6 = 90$.

48. Unter den Bedingungen der Aufgabe entstehen, wenn die Zahl der Parallelen z. B. 5 ist (Fig. 54), so viele $\triangle\triangle$, als Parallelen vorhanden sind, da jeder, zwischen den Schenkeln des die Parallelen schneidenden Winkelraumes liegende Theil einer Parallele als Grundlinie eines $\triangle$ angesehen werden kann. Mit n Parallelen entstehen also n $\triangle\triangle$. — Um nun zweitens die Anzahl aller entstandenen Figuren zu berechnen, bemerke man, daß die beiden, die Parallelen durchschneidenden g. L. in einem Punkte zusammen treffen. Daher giebt es so viele Figuren, als es Zwischenräume geben würde, wenn die Zahl der Parallelen um 1 größer wäre. Die Zahl der Zwischenräume zwischen $n+1$ Parallelen ist aber $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$. Wäre die Zahl der Parallelen

$n = 5$, so hätte man $\frac{(5+1) \cdot 5}{2} = 15$ Figuren;

$n = 6$, • • • $\frac{(6+1) \cdot 6}{2} = 21$ •

u. s. w.

49. Wenn mehrere Parallelen von mehreren, sich in einem Punkte außerhalb der Parallelen treffenden g. L. durchschnitten werden (Fig. 55), so kann die Anzahl aller dadurch entstehenden Figuren so berechnet werden, wie die Anzahl aller Parallelogramme unter Nro. 44 gefunden wurde. Denn wenn die Zahl der Parallelen um 1 größer wäre, und die jetzt in einem Punkte sich durchschneidenden Linien auch unter sich parallel liefen, so wäre die Zahl aller Figuren eben so groß, als

Digitized by Google

sie unter den Bedingungen der Aufgabe ist; d. h., die Zahl aller Figuren ist, wenn n Parallelen von p Linien (Fig. 55) durchschnitten werden,

$$= \frac{(n+1) \cdot n}{2} \times \frac{p \cdot (p-1)}{2}.$$

Wäre $n = 4$ und $p = 3$, so hätte man $\frac{(4+1) \cdot 4}{2} \times \frac{3 \cdot 2}{2}$ $= 10.3 = 30$ Figuren.

Anmerkung. In der ersten Auflage des zu dieser Schrift gehörenden Leitfadens waren unter den Nummern 50, 51 und 52 einige Aufgaben aufgestellt, welche manchem Lehrer Schwierigkeiten gemacht haben. Ich habe dieselben darum aus der zweiten Auflage weggelassen. Um der Besitzer der ersten Auflage willen, und mehrmals von Einzelnen um die Mittheilung der Auflösungsweisen ersucht, will ich hier die angezogenen Aufgaben aufstellen und auflösen. Wo ein Lehrer einen tüchtigen Schüler hat, da möge er denselben seine Kräfte an diesen Aufgaben, besonders an Nro. 52, versuchen lassen.

Behandlung der Aufgaben 50, 51 und 52 der ersten Auflage des Leitfadens.

Aufg. (50). Wie viele ungetheilte Figuren entstehen höchstens, wenn von 7, 8, 9 g. L. 3, 4 oder 5 gleichlaufend sind?

Aufg. (51). Wie viele ungetheilte Figuren entstehen, wenn von 8, 9, 10 g. L. 4, 5 oder 6 durch denselben Punkt gehen?

Aufg. (52). Wie viele Durchschnittspunkte und Figuren überhaupt entstehen, wenn 5 Parallelen von 4 Parallelen und beide von 3 Parallelen so durchschnitten werden, daß in der Mitte ein △ entsteht? (Die, diese Aufg. veranschaulichende Figur gleicht Fig. 33.)

Diese Aufgaben sollen zugleich allgemein aufgelöset werden.

Vorbereitung zur 50. Aufgabe.

1. Wenn sich n Linien in der höchsten Anzahl von Punkten durchschneiden, so entstehen $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ ungetheilte Figuren.

Beweis.

Wenn sich 2 gerade Linien durchschneiden, so entstehen unbegränzte Zwischenräume, deren einer begränzt wird, wenn eine 3te gerade Linie diese beiden Linien durchschneidet. Hierdurch entsteht eine Figur. Kommt noch eine 4te gerade Linie hinzu, die diese 3 Linien durchschneidet, so begränzt sie zwei, zwischen diesen 3 Linien liegende Zwischenräume, und bildet 2 neue Figuren.

Es sind also da: 1 + 2 Figuren.

Eine 5te Linie, welche die vorhandenen 4 durchschneidet und hierdurch 3 Zwischenräume begränzt, bildet 3, eine 6te Linie 4, eine 7te Linie 5, eine nte Linie (n − 2) neue Figuren. Die Anzahl der Figu-

Digitized by Google

ren, welche durch die Durchschneidung von n Linien unter obiger Bedingung entstehen, ist also:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots n - 2.$$

Addirt man, um die Summe dieser arithmetischen Reihe zu finden, das letzte Glied derselben (n — 2) zum ersten (1), und multiplicirt diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder $\left(\frac{n-2}{2}\right)$; so findet man die Summe aller Figuren gleich:

$$(n - 2 + 1) \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right) = (n - 1) \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}.$$

2. Wenn p Parallelen von q geraden, sich innerhalb der Parallelen unter einander nicht durchschneidenden Linien, durchschnitten werden, so entstehen zwischen den Parallelen $(p-1) \cdot (q-1)$ ungetheilte Figuren.

Beweis.

p Parallelen bilden p — 1, nach zwei Seiten hin unbegränzte Zwischenräume. Werden diese Parallelen von 2 anders laufenden Linien durchschnitten, so begränzen diese durchschneidenden Linien jeden der angegebenen Zwischenräume zu einer, alle also zu $(p-1)$ Figuren. Eine dritte, die Parallelen durchschneidende Linie begränzt (p — 1), jezt nur noch nach einer Seite hin unbegränzte Zwischenräume, ebenfalls zu p — 1 Figuren. Eben so eine 4te, 5te, nte Linie. Es entstehen also, wenn 2 Linien die Parallelen durchschneiden, (p — 1), wenn 3, 4, 5, q Linien die Parallelen durchschneiden, 2 (p — 1), 3 (p — 1), 4 (p — 1), (q — 1) . (p — 1) Figuren.

Oder:

Die q durchschneidenden Linien bilden aus jedem, der von den Parallelen gebildeten Zwischenräume so viele Figuren, als sie selbst Zwischenräume von 2 Seiten begränzen. Sie begränzen deren selbst (q—1), bilden also aus jedem, zwischen den Parallelen liegenden Zwischenraume (q—1), aus den $(p-1)$ Zwischenräumen also $(p-1) \cdot (q-1)$ Figuren.

Aufgabe (50).

Wenn von 7, 8, 9 geraden Linien 3, 4 oder 5 gleichlaufend sind, so entstehen $\frac{(5-1) \cdot (5-2)}{2} + (3-1) \cdot (4-1)$, $\frac{(5-1) \cdot (5-2)}{2} + (4-1) \cdot (4-1)$, $\frac{(5-1) \cdot (5-2)}{2} + (5-1) \cdot (4-1)$ ungetheilte Figuren höchstens.

Beweis.

Wenn von 7 Linien 3 gleichlaufend sind, und es soll die höchste Anzahl der Figuren unter dieser Bedingung entstehen, so müssen die 4 nicht gleichlaufenden Linien sich selbst in der höchsten Anzahl von Punkten durchschneiden.

Diese 4, sich in der höchsten Anzahl von Punkten durchschneidenden Linien werden sämmtlich durch die, diesen Durchschnittspunkten zunächst liegende Parallele durchschnitten. Es durchschneiden sich also 5 Linien in der höchsten Anzahl von Punkten. Diese bilden $\frac{(5-1) \cdot (5-2)}{2}$ ungetheilte Figuren. Zu diesen kommen noch die, zwischen den Parallelen liegenden Figuren. Deren sind, da 3 Parallelen von 4 Linien durch-

Digitized by Google

schnitten werden $(4-1).(3-1)$. In Allem giebt's also $\frac{(5-1).(5-2)}{2}$ $+ (4-1).(3-1)$ Figuren.

Sind von 8 Linien 4 gleichlaufend, so durchschneiden sich 5 Linien in der höchsten Anzahl von Punkten, bilden daher $\frac{(5-1).(5-2)}{2}$ Figuren. Ferner werden 4 Parallelen von 4 andern Linien durchschnitten, und bilden $(4-1).(4-1)$ Figuren.

In Allem giebt's also $\frac{(5-1).(5-2)}{2} + (4-1).(4-1)$ Figuren.

Wenn von 9 Linien 5 gleichlaufend sind, so durchschneiden sich 5 Linien in der höchsten Anzahl von Punkten, und 5 Parallelen werden von 4 Linien durchschnitten.

Daher $\frac{(5-1).(5-2)}{2} + (5-1).(4-1)$ Figuren.

Aufgabe (51).

Wenn von 8, 9, 10 geraden Linien 4, 5, 6 durch denselben Punkt gehen, so entstehen $\frac{(5-1).(5-2)}{2} + 4.(4-1)$, $\frac{(5-1).(5-2)}{2}$ $+ 4.(5-1)$, $\frac{(5-1).(5-2)}{2} + 4.(6-1)$ ungetheilte Figuren höchstens.

Beweis.

Wenn von 8 Linien 4 durch denselben Punkt gehen, und die höchste Anzahl Figuren bilden sollen, so müssen sich die übrigen 4 in der höchsten Anzahl von Punkten durchschneiden. Diese 4 werden sämmtlich noch von derjenigen der sich in einem Punkt durchschneidenden Linien durchschnitten, welche jenen Durchschnittspunkten am nächsten liegt. So durchschneiden sich nun 5 Linien in der höchsten Anzahl von Durchschnittspunkten, und bilden $\frac{(5-1).(5-2)}{2}$ ungetheilte Figuren.

Die 4 sich in einem Punkte durchschneidenden Linien bilden $(4-1)$ nach einer Seite hin unbegränzte Zwischenräume. Diese werden von einer Linie der andern Parthie zu eben so viel Figuren begränzt. Dasselbe geschieht von der 2ten, der 3ten und der 4ten Linie, so daß hierdurch $4.(4-1)$ Figuren entstehen.

Es entstehen also in Allem $\frac{(5-1).(5-2)}{2} + 4.(4-1)$ ungetheilte Figuren.

Wenn von 9 Linien 5 sich in einem Punkt durchschneiden, so durchschneiden sich die übrigen 4, plus einer dieser Parthie, in der höchsten Anzahl von Durchschnittspunkten, und bilden $\frac{(5-1).(5-2)}{2}$ ungetheilte Figuren. Zu diesen kommen noch die Figuren, welche zwischen den, sich in einem Punkte durchschneidenden Linien liegen. Deren sind $4.(5-1)$, da die 5 Linien $5-1$ Zwischenräume bilden, die von 4 andern zu eben so viel Figuren begränzt werden. Also ist die Summe aller Figuren $\frac{(5-1).(5-2)}{2} + 4.(5-1)$.

Auf dieselbe Weise beweiset man, daß wenn von 10 Linien 6 sich in einem Punkte durchschneiden, $\frac{5.(5-1).(5-2)}{2} + 4.(6-1)$ Figuren entstehen.

Digitized by Google

Vorbereitung zur folgenden Aufgabe.

1. Wenn p Parallelen von q Parallelen durchschnitten werden, so entstehen p . q Durchschnittspunkte. Denn in jeder der p Linien liegen q Durchschnittspunkte, da jede von q Linien durchschnitten wird. Liegen nun in einer Linie q, so liegen in p Linien p . q Durchschnittspunkte.

2. Zwischen $\left\{\begin{matrix}5\\n\end{matrix}\right\}$ Linien sind $\left\{\frac{\begin{matrix}5\,.\,(5-1)\\2\end{matrix}}{\begin{matrix}n\,.\,(n-1)\\2\end{matrix}}\right\}$ Ambe (Verbindungen zu zwei) möglich.

Denn:

Jede der $\begin{matrix}5\\n\end{matrix}$ Linien läßt sich mit jeder der übrigen, also mit $\left\{\begin{matrix}5-1\\n-1\end{matrix}\right\}$ Linien zu einer Ambe verbinden. Jede Linie dient also zur Bildung von $\left\{\begin{matrix}5-1\\n-1\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}5\\n\end{matrix}\right\}$ Linien zur Bildung von $\left\{\begin{matrix}5\,.\,(5-1)\\n\,.\,(n-1)\end{matrix}\right\}$ Amben.

Bei dieser Zusammenstellung kommt aber jede Ambe zweimal vor, da z. B. die Ambe zwischen der 2ten und 3ten Linie gebildet wird, indem man jede Linie mit der 2ten, und indem man jede Linie mit der 3ten Linie verbindet. Daher muß obige Anzahl noch durch 2 getheilt werden; dieser Quotient ist dann $\left\{\frac{\begin{matrix}5\,.\,(5-1)\\2\end{matrix}}{\begin{matrix}n\,.\,(n-1)\\2\end{matrix}}\right\}$.

Aufgabe (52).

A. Wenn $\begin{matrix}5\\p\end{matrix}$ Parallelen von $\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$ und beide von $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ Parallelen so durchschnitten werden, daß in die Mitte ein Dreieck zu liegen kommt, so ist die Anzahl der Durchschnittspunkte: $\begin{matrix}5.4 + 5.3 + 4.3.\\p.q + p.r + q.r.\end{matrix}$

Denn es werden

I.	$\begin{matrix}5\\p\end{matrix}$	Parallelen von	$\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$	Parallelen durchschnitten, wodurch	$\begin{matrix}5.4\\p.q\end{matrix}$	}	Durchschnittspunkte entstehen.
II.	$\begin{matrix}5\\p\end{matrix}$	" "	$\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$	" "	$\begin{matrix}5.3\\p.r\end{matrix}$		
III.	$\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$	" "	$\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$	" "	$\begin{matrix}4.3\\q.r\end{matrix}$		
				Summe:	$\begin{matrix}5.4 + 5.3 + 4.3.\\p.q + p.r + q.r.\end{matrix}$		

B. Unter obiger Bedingung entstehen:

$$5.4.3+\frac{5.4.3.(5-1+4-1+3-1)}{2}+\frac{[5(5-1)].[4(4-1)].+[5(5-1)].[3(3-1)]+[4(4-1)].[3(3-1)]}{4}$$

$$p.q.r.+\frac{p.q.r.(p-1+q-1+r-1)}{2}+\frac{[p(p-1)].[q(q-1)]+[p(p-1)].[r(r-1)]+[q(q-1)].[r(r-1)]}{4}$$

einzelne und verbundene Figuren.

Diese Figuren sind theils Dreiecke, theils Paralleltrapeze, theils Parallelogramme.

A. Die Anzahl der Dreiecke ist $\begin{matrix}5\,.\,4\,.\,3\\p\,.\,q\,.\,r\end{matrix}$. Denn: so oft und

Digitized by Google

nur so oft eine der $\left\{\begin{matrix}5\\4\\3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}p\\q\\r\end{matrix}\right\}$ Linien von einer der $\left\{\begin{matrix}4\\3\\5\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}q\\r\\p\end{matrix}\right\}$ Linien und diese von einer der $\left\{\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}r\\q\\p\end{matrix}\right\}$ Linien durchschnitten wird, entsteht ein Dreieck. Nimmt man nun etwa die Durchschnittspunkte der $\begin{matrix}5\\p\end{matrix}$ mit den $\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$ Linien, so gehen von diesen Durchschnittspunkten alle Dreiecke aus. In jedem dieser Durchschnittspunkte durchschneiden sich 2 Linien, die einen Winkelraum bilden, der von jeder der $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ Linien zu einem Dreieck begränzt wird. Daher gehen von einem dieser Durchschnittspunkte $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ und von $\begin{matrix}5\cdot 4\\p\cdot q\end{matrix}$ Durchschnittspunkten $\begin{matrix}5\cdot 4\cdot 3\\p\cdot q\cdot r\end{matrix}$ Dreiecke aus.

B. Die Anzahl der Paralleltrapeze ist:

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot(5-1+4-1+3-1)}{2}$$

$$\frac{p\cdot q\cdot r\cdot(p-1+q-1+r-1)}{2}.$$

Zur Bildung eines Paralleltrapezes wird der Durchschnitt zweier Parallelen mit 2, unter sich nicht gleichlaufenden Linien erfordert. Will man daher die Paralleltrapeze, welche zwischen den $\begin{matrix}5,\ 4,\ 3\\p,\ q,\ r\end{matrix}$ Parallelen liegen, aufsuchen, so muß man zusehen, wie oft je 2 (jede Ambe) der $\begin{matrix}5\\p\end{matrix}$, der $\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$ und der $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ Linien von 2, unter sich nicht gleichlaufenden Linien durchschnitten werden.

$\begin{matrix}5\\p\end{matrix}$ Linien bilden $\frac{\frac{5(5-1)}{2}}{\frac{p(p-1)}{2}}$ Amben. Jede dieser Amben wird von einer der $\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$ und einer der $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ Linien (da diese unter sich ungleichlaufend sind) so durchschnitten, daß ein Paralleltrapez entsteht. Durch eine der $\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$ Linien, in Verbindung mit jeder der $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ Linien, entstehen also $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ und durch alle $\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$ Linien, in Verbindung mit jeder der $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ Linien, $\begin{matrix}4\cdot 3\\q\cdot r\end{matrix}$ Paralleltrapeze aus jeder Ambe, mithin aus $\frac{\frac{5(5-1)}{2}}{\frac{p(p-1)}{2}}$ Amben $\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3(5-1)}{2}}{\frac{p\cdot q\cdot r(p-1)}{2}}$ Paralleltrapeze.

Auf dieselbe Weise findet man zwischen den $\begin{matrix}4\\q\end{matrix}$ Parall. $\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3(4-1)}{2}}{\frac{p\cdot q\cdot r(q-1)}{2}}$ und zwischen den $\begin{matrix}3\\r\end{matrix}$ Parallelen $\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3(3-1)}{2}}{\frac{p\cdot q\cdot r(r-1)}{2}}$ Paralleltrapeze.

Die Summe aller ist daher $\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3(5-1)}{2}+\frac{5\cdot 4\cdot 3(4-1)}{2}+\frac{5\cdot 4\cdot 3(3-1)}{2}}{\frac{p\cdot q\cdot r(p-1)}{2}+\frac{p\cdot q\cdot r(q-1)}{2}+\frac{p\cdot q\cdot r(r-1)}{2}}$

Digitized by Google

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3\,(5-1+4-1+3-1)}{2} \quad \text{oder auch:} \quad \frac{5 \cdot 4 \cdot 3\,(5+4+3-2)}{2}$$
$$\frac{p \cdot q \cdot r\,(p-1+q-1+r-1)}{2} \qquad \frac{p \cdot q \cdot r\,(p+q+r-3)}{2}.$$

C. Die Summe der Parallelogramme ist:

$$\frac{5\,(5-1) \cdot 4\,(4-1) + 5\,(5-1) \cdot 3\,(3-1) + 4\,(4-1) \cdot 3\,(3-1)}{4}$$
$$\frac{p\,(p-1) \cdot q\,(q-1) + p\,(p-1) \cdot r\,(r-1) + q\,(q-1) \cdot r\,(r-1)}{4}.$$

Beweis.

Da Parallelogramme durch den Durchschnitt zweier Parallelen mit zweien Parallelen entstehen, so hat man zu untersuchen, wie oft eine Amde der $\frac{5}{p}$ Parallelen von einer Amde der $\frac{4}{q}$ und von einer Amde der $\frac{3}{r}$ Linien, ferner wie oft eine Amde der $\frac{4}{q}$ Parallelen von einer Amde der $\frac{3}{r}$ Linien durchschnitten wird.

Durch den Durchschnitt der $\frac{5}{p}$ Linien mit den $\frac{4}{q}$ Linien entstehen $\frac{5\,(5-1) \cdot 4\,(4-1)}{4}$ $\frac{p\,(p-1) \cdot q\,(q-1)}{4}$ Parallelogramme.

Denn:

$\frac{4}{q}$ Linien bilden $\frac{\frac{4\,(4-1)}{2}}{\frac{q\,(q-1)}{2}}$ Amben. Also wird jede der Amben der $\frac{5}{p}$ Linien von $\frac{\frac{4\,(4-1)}{2}}{\frac{q\,(q-1)}{2}}$ Amben durchschnitten, wodurch aus jeder $\frac{\frac{4\,(4-1)}{2}}{\frac{q\,(q-1)}{2}}$ und aus allen (da $\frac{5}{p}$ Linien $\frac{\frac{5\,(5-1)}{2}}{\frac{p\,(p-1)}{2}}$ Amben bilden) $\frac{5\,(5-1) \cdot 4\,(4-1)}{4}$ $\frac{p\,(p-1) \cdot q\,(q-1)}{4}$ Parallelogramme entstehen.

So findet man, daß durch den Durchschnitt der $\frac{5}{p}$ mit den $\frac{3}{r}$ Linien $\frac{5\,(5-1) \cdot 3\,(3-1)}{4}$ $\frac{p\,(p-1) \cdot r\,(r-1)}{4}$ Parallelogramme, und durch den Durchschnitte der $\frac{4}{q}$ Linien mit den $\frac{3}{r}$ Linien $\frac{4\,(4-1) \cdot 3\,(3-1)}{4}$ $\frac{q\,(q-1) \cdot r\,(r-1)}{4}$ Parallelog., also in Allem

$$\frac{5(5-1) \cdot 4(4-1) + 5(5-1) \cdot 3(3-1) + 4(4-1) \cdot 3(3-1)}{4}$$
$$\frac{p(p-1) \cdot q(q-1) + p(p-1) \cdot r(r-1) + q(q-1) \cdot r(r-1)}{4}$$

Parallelog. entstehen.

Da also der Dreiecke $\frac{5}{p} \cdot \frac{4}{q} \cdot \frac{3}{r}$,

Digitized by Google

der Paralleltrapeze $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3\,(5-1+4-1+3-1)}{2}$ $\frac{p \cdot q \cdot r\,(p-1+q-1+r-1)}{2}$ und

der Parallelogramme $\frac{5(5-1).4(4-1)+5(5-1).3(3-1)+4(4-1).3(3-1)}{4}$ $\frac{p(p-1).q(q-1)+p(p-1).r(r-1)+q(q-1).r(r-1)}{4}$

vorhanden sind, so ist die Summe aller Figuren die oben angegebene.

Anmerkung. Es kann dem aufmerksamen Leser nicht schwer werden, die Figuren, welche die einzelnen Fälle der vorhergehenden drei Aufgaben erläutern, zu entwerfen. Deßhalb sind dieselben nicht einzeln mitgetheilt worden.

50. Wenn durch die Bewegung einer g. L. ein Kreis entstanden gedacht werden soll, so bewege man in Gedanken die g. L. so, daß sie sich in derselben Ebene um einen ihrer feststehenden Endpunkte so herum bewegt, bis sie ihre ursprüngliche Lage wieder erreicht.

51. Der Kreis ist eine Figur, deren Gränzlinie in allen Punkten gleich weit von einem in der Figur liegenden Punkte entfernt ist. Dieser Punkt wird der Mittelpunkt (das Centrum) des Kreises genannt.

52. Kreislinie oder Peripherie ist die, die Kreisfläche umgebende krumme Linie. Jeder Theil derselben heißt ein Bogen. Halbmesser ist die g. L. von dem Mittelpunkte nach irgend einem Punkte der Peripherie; Durchmesser heißt jede g. L., welche durch den Mittelpunkt geht und deren Endpunkte in der Peripherie liegen; Sehne wird jede g. L. genannt, deren Endpunkte mit der Kreislinie zusammen fallen; also ist auch jeder Durchmesser eine Sehne. Durchschneidet eine g. L. die Kreisebene, so daß sie zum Theil außerhalb des Kreises liegt, so heißt diese Linie Sekante; Berührungslinie oder Tangente, wenn sie, auch beliebig verlängert, mit der Peripherie nur einen Punkt gemein hat; Berührungspunkt heißt der Punkt, welchen die Berührungslinie mit der Kreislinie gemein hat; die Kreisebene ist die Ebene, welche von der Kreislinie umschlossen ist; Halbkreis ist derjenige Theil des Kreises, welcher von der halben Peripherie und einem Durchmesser begränzt wird; der Viertelkreis oder Quadrant hat den vierten Theil der Kreislinie und zwei Halbmesser zur Gränze; derjenige Theil des Kreises, welcher von einem Bogen und der dazu gehörigen Sehne begränzt wird, heißt Abschnitt, Kreisabschnitt oder Segment; Kreisausschnitt aber, wenn das Kreisstück von 2 Radien und dem dazwischen liegenden Bogen umschlossen wird. Derjenige Winkel, dessen Scheitel an dem Mittelpunkte liegt (und dessen Schenkel Radien sind), heißt Mittelpunkts- oder Centriwinkel; Peripheriewin-

Digitized by Google

kel aber, wenn der Scheitel des Winkels in der Peripherie liegt und die Schenkel desselben Sehnen sind.

53. Aus der Entstehungsart des Kreises gehet hervor, daß alle Halbmesser, wie alle Durchmesser desselben Kreises einander gleich sind. Halb- und Durchmesser eines Kreises verhalten sich zu einander = 1 : 2, d. h. der Radius ist die Hälfte des Diameters desselben Kreises.

54. Wenn ein Punkt mit einem Kreise in derselben Ebene liegt, so liegt der Punkt entweder außerhalb des Kreises, ohne Gemeinschaft mit demselben, oder in der Peripherie, oder innerhalb der Peripherie desselben. Ein vierter Fall kann nicht statt finden.

55. Ist die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte gleich dem Radius, so liegt derselbe in der Peripherie; ist aber diese Entfernung kleiner als der Radius, so liegt er innerhalb, ist sie größer, so liegt er außerhalb des Kreises.

56. 1. Kreis und 1 g. L.
Die g. L. soll mit dem Kreise in Verbindung stehen. Dies kann auf zwei Arten geschehen. Entweder hat sie, gehörig verlängert, nur einen, oder 2 Punkte mit der Peripherie gemein. In jenem Falle ist sie Tangente, in diesem Falle aber Sehne oder Sekante des Kreises (Fig. 56, 1).

2. Kreis und 2 g. L.

a) Beide g. L. sind Tangenten des Kreises — entweder parallel oder nicht parallel (2).

b) Beide sind Sehnen — entweder unter einander parallel oder nicht (3).

c) Die eine ist Tangente, die andere Sehne — parallel oder nicht (4).

3. Kreis und 3 g. L.

Nur die Hauptfälle sollen aufgezählet werden.

a) Alle g. L. sind Tangenten (5).

b) Zwei derselben sind Tangenten, die dritte ist Sehne (oder Sekante) (6).

c) Eine ist Tangente, zwei sind Sehnen (7).

d) Alle 3 sind Sehnen.

Einige der in diesem Falle statt findenden Verbindungen sind in 8 bis 13 verzeichnet.

57. Durch die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe sind Triangel gefunden worden, welche theils in, theils um den Kreis beschrieben sind. Eine Figur heißt in den Kreis beschrieben, wenn ihre Winkelpunkte in der Peripherie liegen und ihre Seiten Sehnen des Kreises sind; und eine Figur heißt um den Kreis beschrieben, wenn die Seiten derselben Tangenten

Digitized by Google

des Kreises sind. Ist eine Figur in den Kreis beschrieben, so ist der Kreis um dieselbe beschrieben; und ist eine Figur um denselben beschrieben, so ist der Kreis in dieselbe beschrieben.

Die dreiseitige Figur in dem Kreise entsteht durch 3 (gehörig gelegte) Sehnen, die vierseitige durch 4, die nseitige durch n Sehnen; die 4- oder nseitige Figur um den Kreis erfordert 4 oder n Tangenten.

58. 2 Kreise in derselben Ebene liegen entweder

1. ganz außer einander (Fig. 57) — entweder einander berührend oder nicht (1 und 2); oder
2. der eine liegt ganz in dem andern — entweder berührend oder nicht, oder deckend (3, 4 u. 5); oder
3. der eine liegt zum Theil in, zum Theil außer dem andern; sie durchschneiden einander (6).

59. Die Mannigfaltigkeit der gegenseitigen Lagen dreier Kreise ist sehr groß. Der Lehrer läßt den Schüler sie aufsuchen. Sobald sich derselbe überzeugt hat, daß hier sehr viele Fälle statt finden, so kann man, um Ordnung in das Chaos zu bringen, eine Bedingung hinzufügen. Z. B.

1. Suchet, in wie vielen Punkten 3 Kreise einander berühren können (Fig. 58, 1, 2 u. 3)!
2. In wie vielen Punkten können 3 Kreise einander durchschneiden (4, 5 u. 6)?
3. Welche Lage haben 3 Kreise, wenn ihre Mittelpunkte zusammenfallen? u. s. w.

60. Unter der Entfernung zweier Punkte versteht man bekanntlich die Länge der g. L. zwischen beiden.

Ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise, welche in derselben Ebene liegen, so groß, als ihre Halbmesser zusammen lang sind, so liegen die Ebenen der Kreise außer einander; ihre Peripherien aber haben einen Punkt gemeinschaftlich; sie berühren einander (Fig. 59, 1).

Ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise kleiner als die Summe ihrer Halbmesser, so haben beide Kreise nothwendig einen Theil der Kreisebenen mit einander gemein, oder die Ebene des einen Kreises liegt ganz in der Ebene des andern (Fig. 2).

Ist aber die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise größer als die Summe ihrer Halbmesser, so liegen die Kreisebenen und die Peripherien ganz von einander getrennt (F. 3).

61. Die Umkehrung der vorstehenden drei Sätze ist sehr leicht. Dieselben Figuren veranschaulichen auch die umgekehrten Sätze, welche sind:

Digitized by Google

1. Berühren 2 Kreise einander von außen, so ist die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich der Summe der Radien beider Kreise.
2. Durchschneiden 2 Kreise einander, oder haben ihre Ebenen ein Stück mit einander gemein, so ist die Entfernung ihrer Mittelpunkte kleiner als ihre Radien zusammen.
3. Liegen 2 Kreise ohne Berührung ganz außer einander, so ist die Entfernung ihrer Mittelpunkte größer als die Summe ihrer Radien.

§. 13. Figuren zu lesen, herkömmlich zu bezeichnen und zu benennen.

1. Der Lehrer zeichnet eine beliebige, aus geraden, oder aus krummen, oder aus geraden und krummen Linien bestehende Figur an die Schultafel, und dann läßt er die Schüler angeben, was sie an der Figur bemerken. Da das Gezeichnete nichts anders ist als das Bild eines Gedachten, so muß wiederholt darauf aufmerksam gemacht werden, daß das Gedachte nicht leiblich gesehen werden kann, sondern daß das gezeichnete Bild — Bild bleibt und nie Sache wird, nur als passendes Zeichen an die demselben zu Grunde liegende Vorstellung erinnert. Daher muß auch darauf gehalten werden, daß der Ausdruck des Schülers so sei, daß der Lehrer sich überzeugt, der Schüler verwechsele nicht Sache und Bild. Hat der Schüler darin eine gewisse Festigkeit erlangt, so daß diese, im Unterrichte überhaupt so leicht und verderblicher Weise herbeigeführte Verwechselung nicht mehr zu besorgen ist, so darf der Lehrer mehr Kürze im Ausdruck gestatten. Einige Beispiele werden hinreichen, den zu nehmenden Gang zu bezeichnen.

Lehrer. Was bemerkt ihr an der Tafel? (Fig. 60.)

Schüler. Wir bemerken außen 4 mit einander verbundene Striche, welche einzeln gerade Linien und in ihrer Verbindung 4 geradlinige Winkel und eine vierseitige geradlinige Figur darstellen können. Je zwei einander gegenüber liegende Punkte sind durch gerade scheinende Striche verbunden. Die 4 ersten Striche scheinen einander gleich und unter rechten Winkeln mit einander verbunden zu sein. Auch sind dem Anscheine nach die beiden Geren einander gleich.

Wenn dieses so angenommen wird, so bemerken wir noch: 8 Dreiecke, nämlich 4 größere und 4 kleinere; jedes der ersteren ist aus zweien der letzteren zusammengesetzt; jedes der ersteren ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges △; je zwei

Digitized by Google

neben einander liegende der kleineren Dreiecke haben einen Schenkel mit einander gemein, und 2 ihrer Seiten bilden eine g. L., eine Gere des Quadrats, und sie haben 2 Winkelpunkte mit einander gemein.

Jeder der 4 Winkel des Quadrats ist in 2 Theile getheilt, welche zusammen = R sind; an dem Durchschnittspunkte der Geren liegen 4 Winkel, von welchen 2 neben einander liegende Nebenwinkel, und je 2 einander gegenüber liegende Scheitelwinkel sind; in Allem sind also 16 hohle Winkel vorhanden; an dem Mittelpunkte liegen 4 erhabene und 4 flache Winkel u. s. w.

Lehrer. Was glaubt ihr an dieser Figur (Fig. 61) zu bemerken?

Schüler. Gerade und krumme Linien; eine krumme, welche in 4 einzelne Theile getheilt ist; je 2 und 2, und je 3 und 3 derselben bilden eine verbundene krumme Linie; 6 gerade oder 8 g. L.; 4 und 4 derselben scheinen einander gleich zu sein. In jedem der 4 Punkte in der krummen Linie kommen 3 g. L. zusammen; der Durchschnittspunkt der beiden Geren des Vierecks scheint der Mittelpunkt eines Kreises zu sein, dessen Peripherie von der krummen Linie dargestellt wird.

Ich bemerke 16 hohle Winkel, scheinbar 8 rechte und 8 spitze; außerdem an jedem Punkte in der Peripherie 6 gemischtlinige, überhaupt also 4.6 = 24 gemischtlinige Winkel. Der Kreis ist in 8 Theile oder einzelne Figuren getheilt; 4 derselben sind geradlinige Dreiseite, und 4 derselben gemischtlinige Zweiseite; eines jener macht mit einem von diesen ein gemischtliniges Dreiseit, dessen beide Schenkel Radien des Kreises sind; je 2 neben einander liegende geradlinige △△ bilden ein größeres geradliniges △, welches mit den beiden daran liegenden Zweiseiten (Zweiecken) gleich der Hälfte des Kreises ist u. s. w. u. s. w.

2. Auf ähnliche Weise lasse der Lehrer mehr zusammengesetzte Figuren beschauen und betrachten, und das Geschaute mit dem dabei Gedachten vergleichen und benennen. Wie gesagt: Wir schauen nur Schein, aber wir denken Wahrheit.

3 u. 4. Nun setze der Lehrer Buchstaben an die Winkelpunkte einer Figur und lehre die Schüler, die verzeichneten Gegenstände so zu benennen, wie es herkömmlich ist. Wenn dazu z. B. die Fig. 61 genommen wird, so wird der Schüler Folgendes nennen:

Die bezeichneten Striche heißen: ab oder ba, bc oder cb, cd oder dc, da oder ad, ao oder oa u. s. w.; die Winkel heißen: aod oder doa, aob oder boa, dao oder oad, dab oder bad u. s. w., woraus sich ergiebt, daß ein gehörig mit Buchstaben bezeichneter Winkel auf 2 Arten gelesen wird, da Winkel dcb mit

dem Winkel bcd einerlei ist. Ein Buchstabe, welcher an den Scheitelpunkt eines Winkels gesetzt ist, kann aber nur dann einen Winkel unzweideutig bezeichnen, wenn an diesem Punkte nicht noch mehrere Winkel liegen. Denn wollte man in unserer Figur von dem Winkel c reden, so bliebe es zweideutig, ob damit der Winkel dco oder bco oder dcb gemeint sei. Setzt man aber einen Buchstaben in die Oeffnung des Winkels, so kann der Winkel mit diesem Buchstaben benannt werden, z. B. der Winkel x, wenn mit demselben der Winkel deo bezeichnet werden soll. Alles Zweideutige, Ungewisse und Schwankende muß sorgfältigst vermieden werden; sonst verliert der mathematische Unterricht allen Werth.

5. Dazu diene Fig. 62.

6. Eine zweckmäßige Uebung! Der Schüler (der Mensch überhaupt) versteht eigentlich nur so viel, als er machen, darstellen, construiren kann. Und die Mathematik ist darum ein so tief wirkendes Bildungsmittel des Verstandes, weil wir in der Mathematik, wie in der Kunst, Alles selbst erzeugen, folglich Alles, was gemacht wird, verstehen.

7. Fig. 63 stelle ein regelmäßiges Siebeneck dar; von dem Mittelpunkte desselben seien nach allen Winkelpunkten gerade Linien gezogen. Man gewahrt: 7 Strahlen vom Mittelpunkte und 3 von jedem Winkelpunkte des Siebenecks ausgehend; am Mittelpunkte 7 einzelne hohle, 7 verbundene zweifache, 7 verbundene dreifache hohle und 21 erhabene Winkel; an jedem Winkelpunkte des Siebenecks 2 einzelne und einen verbundenen hohlen Winkel; 7 Dreiecke, 7 Vierecke, 7 Fünfecke, 7 Sechsecke, 7 Siebenecke außer dem ganzen Siebenecke, 7 Achtecke.

8 und 9 bleiben dem Lehrer überlassen.

10. Wird das Verlangte z. B. in einem Fünfecke ausgeführt, so entsteht im Innern desselben ein regelmäßiges kleineres Fünfeck (Fig. 64), welches die umgekehrte Lage des ersten hat.

11. Verlängert man, umgekehrt, alle Seiten eines regelmäßigen Fünfecks, bis sich je 2 und 2 derselben schneiden, und verbindet man diese Durchschnittspunkte durch g. L., so erhält man das größere, um das kleinere liegende reguläre Fünfeck (Fig. 65).

12. $+$ ist das Zeichen der Addition;
$-$ " " " " Subtraction;
$\times$ oder $\cdot$ " " " Multiplication;
$:$ " " " Division;
$=$ " " " Gleichheit;
$>$ $<$ sind Zeichen der Ungleichheit. Die Oeffnung des Zeichens wird der größeren Größe zugekehrt;
$\llcorner$ oder $\sphericalangle$ ist das Zeichen des Winkels;

Digitized by Google

R ist das Zeichen des rechten Winkels;
△ " " " — " Dreiecks;
∥ oder ∥ " " " Parallelismus.

13. 6 + 4 heißt: zu 6 soll 4 addirt werden; dieses giebt 10; daher: 6 + 4 = 10.

6 — 4 heißt: von 6 soll 4 weggenommen werden. Da der Rest 2 ist, so wird dieß so bezeichnet; 6 — 4 = 2.

6 + 4 — 3 heißt: zu 6 soll 4 addirt, und von der dadurch entstehenden Summe soll 3 weggenommen werden; in Zeichen dargestellt:

$$6 + 4 - 3 = 10 - 3 = 7.$$

Die übrigen Bezeichnungen werden nun klar sein; man versäume nicht, die Zeichen in Worte zu übersetzen. Führt man die angegebenen Operationen aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} 6 - 4 + 3 &= 2 + 3 = 5. \\ 6 \times 4 &= 6.4 = 24. \\ 6.4 + 10 - 12 &= 24 + 10 - 12 \\ &= 34 - 12 \\ &= 22. \\ 12 : 4 &= {}^{12}/_{4} = 3. \\ 12 : 4 + 8 . 3 - 27 &= 3 + 24 - 27 \\ &= 27 - 27 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Linie ab + cd = ad heißt: die Summe der beiden Linien ab und cd giebt (oder ist gleich der) Linie ad.

∟ abc + ∟ cbe = ∟ abe heißt: die beiden Winkel abc und cbe bilden den Winkel abe.

∟ abe — ∟ abc = ∟ cbe heißt: der Unterschied der Winkel abe und abc ist dem Winkel cbe gleich.

Die Bedeutung der folgenden Zeichen ist für sich klar. R> spitzer Winkel, und R< stumpfer Winkel.

Anmerkung. Das Divisionszeichen (:) ist oben in dem Sinne gebraucht, in welchem es in den meisten mathematischen Schriften angewandt wird. Von den beiden Größen, zwischen welchen es steht, bezeichnet die erste den Dividenden, die zweite den Divisor. In dem von Hrn. Heuser und mir herausgegebenen Rechenbüchern ist die Stellung der beiden durch (:) verbundenen Zahlen, um eines praktischen Nutzens willen, umgekehrt gewählt.

14. $[(12 + 10 - 5) : 9] . 2$ oder $\frac{12 + 10 - 5}{9} \times 2.$

15. Das selbstständige, geistige Arbeiten ist das vorzüglichste Ziel jedes guten Unterrichts. Daher muß man jede Gelegenheit ergreifen, welche zur Belebung der geistigen Selbstthätigkeit des Schülers beizutragen im Stande ist.

Digitized by Google

16. Diejenigen Seiten eines rechtwinkligen △, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten, und die dem rechten Winkel gegenüber stehende Seite wird Hypothenuse genannt.

§. 14. Das Diktiren der Figuren.

Bemerkung Das Diktiren der Figuren hat theils den Zweck, den Schüler anzuleiten, genau das auszuführen, und in den üblichen Zeichen darzustellen, was der Lehrer verlangt, theils auch den Schüler zu nöthigen, sich auf das Bestimmteste auszudrücken. Denn wenn derselbe zum Diktiren einer selbst entworfenen Figur zugelassen wird, so ist er, damit alle Schüler auf ihren Tafeln das Angegebene nachzubilden im Stande seien, zur vollkommensten Bestimmtheit im Ausdrucke genöthigt. Der mathematische Unterricht wirkt daher nicht nur für Klarheit der Begriffe, sondern auch für Genauigkeit des mündlichen und schriftlichen Ausdrucks sehr förderlich.

1. Fig. 66 veranschaulicht das Verlangte.
2. Fig. 61 zeigt das Verlangte anschaulich.
3. Fig. 67 stellt die Ausführung dar.

4 u. 5. wird der Schüler lösen.

§. 15. Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz.

1. Unter dem Ausdrucke: 2 Felder, Wiesen oder Gärten sind gleich groß, versteht man die Gleichheit der Größe ihrer Flächenräume.
2. Unter der Gleichheit der Größe zweier Aepfel versteht man, daß beide gleich große körperliche Räume einnehmen.
3. In Nro. 1 und in Nro. 2 wurde von Gleichheit der Größe geredet; im ersten Falle verstand man unter Größe den Flächenraum, im zweiten Falle den Raum, welchen die genannten Körper einnehmen.
4. Im ersten Falle denkt man also nur an Länge und Breite der Ausdehnung.
5. 2 gerade oder 2 krumme Linien sind gleich groß, wenn die Länge der einen gleich ist der Länge der andern.

6 u. 7. Eine g. L. kann so lang sein wie eine krumme, oder eine g. L. kann einer krummen an Länge gleich sein. In Hinsicht der Form aber bleiben sie stets ungleich.

8. Ein Dreieck hat mit einem andern gleiche Größe (Gleichheit schlechthin), wenn der Flächenraum des einen gleich ist dem Flächenraume des andern.

9. Auch ein △ kann einen eben so großen Flächenraum haben als ein Viereck; daher kann ein △ (in Hinsicht der Flächenausdehnung) einem Vierecke gleich sein.

10. Dieses möge Fig. 68 anschaulich machen.

11. Die Gleichheit der Figuren in Hinsicht des Flächenraumes hängt also von der Form (Gestalt, Anzahl der Seiten, Größe der Winkel u. s. w.) gar nicht ab.

12. So kann ein Kreis einem Dreiecke, Vierecke u. s. w., überhaupt irgend einer gerad- oder krummlinigen Figur gleich sein.

13. Ein Porträt oder ein Schattenriß heißt gelungen, wenn das Porträt oder der Schattenriß derjenigen Person ähnlich ist, von welcher das Porträt oder der Schattenriß genommen ist.

14. Die Aehnlichkeit zweier Figuren besteht daher in der Gleichheit ihrer Form, nicht in der Gleichheit ihrer Größe.

15. Allerdings giebt es Figuren, welche gleich sind in Hinsicht der Form, d. h., welche ähnlich sind, ungeachtet ihrer Ungleichheit in Hinsicht der Größe. Z. B. das Bildniß eines Menschenkopfes kann kleiner oder größer sein als der Kopf; aber gleiche Form oder Aehnlichkeit sollen beide haben.

16. Nein.

17. Ist es möglich, 2 Linien oder Figuren so zusammen zu schieben, daß die eine in allen Theilen mit der andern auf's genaueste zusammen fällt, so sind sie nicht nur an Größe, sondern auch an Form gleich.

18. Zwei Figuren sind congruent, oder sie decken sich, heißt also: sie sind gleich groß und ähnlich. Daher ist das Zeichen des Deckens oder der Congruenz zusammen gesetzt aus den beiden Zeichen der Gleichheit der Größe und der Gleichheit der Form, oder der Gleichheit schlechthin und der Aehnlichkeit (≡). △ abc ≡ △ def heißt: das Dreieck abc ist gleich und ähnlich dem Dreieck def.

19. Unter der Gleichheit zweier Figuren versteht man ihre Gleichheit in Hinsicht ihres Flächenraumes. Unter der Aehnlichkeit zweier Figuren versteht man ihre Gleichheit in Hinsicht der Form. Die Congruenz derselben schließt beide Merkmale zugleich in sich.

20. Von diesen Merkmalen kann ein △ mit einem Vierecke die Gleichheit, nicht aber die Aehnlichkeit gemein haben; also kann auch ein △ mit einem Vierecke nicht congruent seyn.

21. Da gerade Linien stets einerlei Form haben, so sind 2 g. L., wenn sie gleiche Länge haben, ähnlich und gleich.

22. Legt man 2 einfache g. L. so in einander, daß der Endpunkt der einen in den Endpunkt der andern fällt, so fällt der andere Endpunkt der größeren über den zweiten Endpunkt der

Digitized by Google

kleineren hinaus, und dasjenige Stück, welches zwischen den beiden unvereinigten Endpunkten der g. L. liegt, stellt den Unterschied der beiden Linien dar.

23. Begreiflicher Weise haben diejenigen Figuren, welche in einander gelegt, zusammenfallend, gedacht werden können, gleiche Seiten- und Winkelzahl.

24. Da man unter der Größe eines Winkels die Größe der Neigung der beiden Schenkel gegen einander versteht, so versteht man unter der Gleichheit zweier Winkel die Gleichheit der Neigungen der beiden Schenkelpaare. Daraus folgt, daß die Gleichheit zweier Winkel von der Neigung der Schenkel, nicht aber von der Länge der Schenkel abhängt.

25. Den Unterschied zweier Winkel macht man dadurch anschaulich, daß man beide mit ihren Scheitelpunkten und mit einem Schenkel in einander legt. Alsdann giebt die Abweichung des anderen Schenkelpaares von einander den Unterschied beider Winkel an.

26. Von der Aehnlichkeit zweier Winkel läßt sich nicht reden. Denn es giebt kein Merkmal zweier Winkel, welches man Gleichheit der Form nennet. Eher hat es einen Sinn, von der Aehnlichkeit zweier Kreise zu reden, da im Grunde alle Kreise einerlei Form haben.

27. In allen regelmäßigen Figuren sind die Winkel der Reihe nach einander gleich. Doch giebt es auch nicht-regelmäßige Figuren, in welchen alle Winkel einander gleich sein können.

28. Die regelmäßigen Figuren sind von gleichen Seiten eingeschlossen. Doch giebt es auch nicht-regelmäßige Figuren, deren Seiten unter einander gleich sind.

29. In den regelmäßigen Figuren sind die Merkmale Gleichseitigkeit und Gleichwinkligkeit mit einander verbunden.

30. Die Ausdrücke: $\triangle abc = \triangle def$ und Fünfeck abcde = Viereck mnop bedeuten, daß die durch die Gleichheitszeichen mit einander verbundenen Figuren gleiche Größe oder gleichen Flächenraum haben.

$\triangle abc \sim \triangle def$ und Viereck abcd $\sim$ Viereck efgh heißen: die durch das Zeichen der Aehnlichkeit verbundenen Figuren sind gleich in Hinsicht der Form.

$\triangle acb \equiv \triangle def$ zeigt an, daß beide Dreiecke gleich und ähnlich sind. Die übrigen Zeichen sind nun für sich verständlich.

31. 1) Wenn 2 $\triangle\triangle$ einen gleichen Winkel haben, so folgt daraus nicht die Gleichheit anderer Stücke dieser $\triangle\triangle$.

2 u. 3) Haben 2 $\triangle\triangle$ 2 gleiche Winkelpaare, so ist auch das dritte Winkelpaar gleich. Für die Seiten folgt daraus

Digitized by Google

aber nichts, eben so wenig, als wenn alle 3 Winkel einander gleich sind.

4 u. 5) Die Gleichheit eines Seitenpaares bestimmt weiter nichts; auch nicht die Gleichheit zweier Seitenpaare.

6) Wenn aber 2 △△ alle Seiten paarweise gleich haben, so sind auch die Winkel paarweise einander gleich, und zwar diejenigen, welche zwischen gleichen Seitenpaaren liegen, oder welche einem gleichen Seitenpaare gegenüber liegen.

7) Sind in 2 △△ ein Winkel und eine Seite einander gleich, so können noch alle anderen Stücke ungleich sein.

8) Die Gleichheit eines Seitenpaares und zweier gleich (ähnlich) liegenden Winkelpaare bestimmt die Gleichheit aller anderen gleich liegenden Stücke der beiden △△, oder ihre Congruenz. Gleich oder ähnlich liegend heißen in Figuren diejenigen Seiten und Winkel, welche an gleichen Stücken, oder ihnen gegenüber liegen.

9) Begreiflicher Weise wird die Congruenz zweier △△ auch durch die Gleichheit aller Winkelpaare und eines Seitenpaares bestimmt.

10) Sind in 2 △△ 2 Seiten und der dazwischen liegende Winkel wechselweise gleich, so ist dadurch die Form und Größe der △△ vollkommen bestimmt, oder sie sind ≡. Liegt aber das gleiche Winkelpaar nicht zwischen den gleichen Seitenpaaren, so sind die △△ nicht nothwendig ≡. Dieß mache Fig. 69 anschaulich. In derselben kann ba = ed, ac = df und ∟ b = ∟ e sein, ohne daß die △△ congruent zu sein brauchen.

11) Da 3 Seiten allein schon die Congruenz zweier △△ bestimmen, so geschieht dieß auch, wenn zu der Gleichheit aller Seiten noch die Gleichheit eines Winkelpaares trifft.

12) Dasselbe ist der Fall, wenn 2 △△ 2 (gleich liegende) Winkel- und 2 gleiche Seitenpaare haben.

13) Eben so ist es mit 2 Winkeln und 3 Seiten, mit 3 Winkeln und 3 Seiten.

Alle diese Sätze soll der Schüler auf seiner Tafel selbst finden. Es ist hier nur um die Befestigung und Aufklärung der Anschauungen zu thun.

Anmerkung. Dergleichen vorläufige Beurtheilungen über das entstehende Resultat sind bei allen Aufgaben der Mathematik, sowohl im Gebiete der Zahlen-, wie der Raumlehre, sehr zu empfehlen. Das Anschauungsvermögen wird dadurch eben so sehr geübt, wie die Urtheilskraft. Man erweckt auf diese Weise den sogenannten praktischen Blick oder das die Wahrheit unmittelbar erfassende Wahrheitsgefühl, und macht dadurch in vielen Fällen alle anderen, meist mühsamen Proben der Operationen überflüssig. Was so in Anschauungen und un-

Digitized by Google

mittelbar (intuitiv) als richtig erkannt worden ist, sichert späterhin die wissenschaftlich aufgestellte Raumlehre durch strenge Beweise, die dem Verstande angehören. Die Gewißheit durch Anschauung und Gefühl ist eine andere als die durch Reflexion und Schluß. Jene soll dieser vorhergehen und dieselbe einleiten. Der Elementarschüler und der auf's praktische Leben beschränkte Mensch kann sich mit der ersten Art, die Wahrheit zu erkennen, in vielen Fällen begnügen, und muß es, da die bestehenden Verhältnisse des Lebens und der Schulen es nicht gestatten, alle Wahrheiten durch strenge Beweise in Begriffen und Schlüssen zu sichern.

§. 16. Ausmessung.

1. Es ist einleuchtend, daß die Größe des Grundmaaßes, mit welchem irgend eine Größe ausgemessen werden soll, bekannt sein muß, und zwar auf anschauliche Weise. Wie lang ein Längenfuß an sich ist, weiß man nicht, und kann auch durch Denken gar nicht gefunden werden. Wollte man sagen: »ein Fuß ist eine Länge von 12 Zoll«, so würde die Länge des Zolles vorausgesetzt; und führe man fort: »ein Zoll enthält 12 Linien« u. s. w., so würde dieses Alles dem mit diesen Längen Unbekannten nichts sagen, sondern derselbe muß durch Anschauung belehrt werden, welche Ausdehnung man einen Fuß nennt. Ist dieß geschehen, dann läßt sich die Länge der angegebenen Theile oder Vielfacher desselben durch Denken bestimmen. Es gründet sich dieses aber zuletzt auf Anschauung. Eine Größe messen heißt: bestimmen, wie vielmal sie das bekannte Grundmaaß oder wie viele aliquote Theile des durch Anschauung bekannten Grundmaaßes sie enthält. — Unsere Größenbeurtheilung räumlicher Ausdehnungen hängt von dem Bau unseres Auges ab. Hätte dasselbe die Einrichtung eines Vergrößerungsglases, so würden uns die räumlich ausgedehnten Gegenstände ganz anders erscheinen. Wir können daher nicht bestimmen, wie groß (lang, hoch u. s. w.) ein Ding an sich ist, sondern nur, wie groß es uns erscheint. Wir Menschen kennen nur die Erscheinungen, nicht das wahre Wesen der Dinge.

2. Längen müssen mit einem Längenmaaß, Flächen mit einem Flächenmaaß, körperlich ausgedehnte Gegenstände mit einem Körpermaaß gemessen werden; Flächen können nicht mit Linien, und die Linien nicht mit Flächen ausgemessen werden. Jedes Verhältniß setzt gleichartige Größen voraus, und die Zahl, welche angiebt, wie oft das Grundmaaß in einer andern, ihm gleichartigen Größe enthalten ist, ist nichts anders, als der Exponent des Verhältnisses, dessen erstes Glied

Digitized by Google

das bekannte Grundmaaß und dessen zweites Glied die auszumessende Größe ist.

3. So viele der Art nach verschiedenen meßbaren Größen es giebt, eben so viele Maaße müssen auch vorhanden seiu. Geistige Größen können nur durch geistige, körperliche Größen nur durch körperliche, räumliche Größen nur durch räumliche Größen, und, wie gesagt, jede nur durch eine ihr gleichartige Größe gemessen werden.

4. Im gemeinen Leben bedienen wir uns bei dem Verkaufe der Ellenwaaren der Elle, d. h., eines Längenmaaßes. Es wird in diesem Kapitel nachgewiesen werden, warum man die Größe gewisser Flächen aus Länge und Breite bestimmen kann; und dann wird das Auffallende schwinden, daß man flächenartig ausgedehnte Körper, wie z. B. eben die sogenannten Ellenwaaren, mit Längen mißt.

Fruchtarten, z. B. Roggen, Gerste u. s. w., werden mit Scheffeln und Theilen von Scheffeln, Holz nach Klaftern, Flüssigkeiten nach Ahm, Anker, Maaß, Schoppen oder Quart, und die Waaren, deren Werth von ihrer Schwere abhängt, mit Gewichtsteinen gemessen. Letztere Art der Messung nennt man Wägen, und die Werkzeuge, mit welchen man mißt, heißen Waagen und Gewichtsteine. Leider! hat jedes Land in Europa, ja fast jede Landschaft unseres deutschen Vaterlandes, eine ihm eigene, von den Gebrauchsweisen anderer Gegenden abweichende Art, Größen zu messen. Ebenso mannigfaltig sind die Eintheilungen der Münzen. Da die neue preußische Münzeintheilung große Bequemlichkeiten für den Handel und Wandel auf dem Markte darbietet, weil sie sich den einfachen Operationen des gemeinen, wenig ausgebildeten Menschenverstandes anschließt; so verdient dieselbe auch von den übrigen deutschen Regierungen angenommen zu werden.

5. Aus dem unmittelbar Vorhergehenden erhellet, daß die Begriffe »Maaß« und »Gewicht« verwandter Art sind. Durch Gewichte bestimmt man die Schwere der Körper in Bezug auf ein durch Anschauung (Gefühl) bekanntes Grundgewicht. Die Gewichte sind also die Maaße für Körper, deren Schwere bestimmt werden soll. Sie sind demnach eine Art Maaße. Maaß ist also der übergeordnete, Gewicht der demselben untergeordnete Begriff.

6. Vermehrt wird die durch die Mannigfaltigkeit der Gewichte und Maaße hervorgebrachten Verwirrung noch dadurch, daß eine und dieselbe Größe oft noch verschiedenen Eintheilungsweisen unterworfen ist. Will man sich dabei verstehen, so muß die Größe jeder Einheit verschiedener Eintheilungen auf eine bekannte bestimmte Größe reducirt werden. Man theilt

Digitized by Google

z. B. die Längenruthe theils in 16, theils in 12, theils in 10 gleiche Theile, Fuß genannt. Ist nun von einem Fuß die Rede, so muß angegeben werden, welche Eintheilung der (als bekannt vorauszusetzenden) Ruthengröße zu Grunde liegt. Oder wenn der Längenfuß als eine festliegende bekannte Einheit angesehen wird, so muß bei seiner zwiefachen Eintheilung in 12 und 10 gleiche Theile, Linien genannt, angegeben sein, welche dieser Eintheilungen gebraucht werden soll. Ohne dieß würde man die Länge der Linien zu groß oder zu klein, wenigstens nicht mit Sicherheit richtig nehmen. — Die Größe eines Fußes der zwölftheiligen Eintheilung der Ruthe verhält sich zu der Länge des Fußes bei der zehntheiligen Eintheilung derselben Grundeinheit von beständiger Größe, nämlich der Ruthe,

$$= 1/12 : 1/10$$
$$= 10 : 12$$
$$= 5 : 6 ,$$

oder 6 Duodecimalfuß sind an Länge 5 Decimalfuß gleich.

Dasselbe Verhältniß findet zwischen dem Duodecimal- und Decimalzoll statt, wenn der Fuß als eine beständige, sich gleich bleibende Größe angesehen wird. Anders aber ist das Verhältniß, wenn der Duodecimalfuß in 12, und der Decimalfuß wieder in 10 gleiche Theile getheilt wird. Denn nun beziehen sich die Zolle nicht auf dieselbe Längeneinheit. Ihr Verhältniß muß also nun in Theilen der Ruthe, welche eine beständige Größe hat, bestimmt werden. Da in diesem Falle 1 Duodecimalzoll = 1/144 der Ruthe, und 1 Decimalzoll = 1/100 der Ruthe; so verhält sich jener zu diesem

$$= 1/144 : 1/100$$
$$= 100 : 144$$
$$= 25 : 36,$$

oder 36 Duodecimalzoll sind gleich 25 Decimalzoll.

In gleichem Verhältniß stehen Duodecimallinie und Decimallinie zu einander, wenn sie sich auf den Fuß, als dritte Einheit, beziehen.

Beiläufig finde hier die Meinung ein Plätzchen, daß die zwölftheilige Eintheilung einer Einheit der zehntheiligen für das praktische Leben vorzuziehen ist. Die Lobpreiser des Decimalsystems werden diese Ansicht paradox finden. Aber man bedenke Folgendes! Ein Maaßsystem, mit welchem der gemeine Mann (die übergroße Mehrzahl des Volkes) bei seinem wenig geübten Verstande, also der Knecht und die Magd, der Bauer und Bürger, die Bäurin und Bürgersfrau umgehen soll, muß schlechterdings auch nach dem Hausverstande dieser

einfachen Menschen eingerichtet, d. h., es muß der Verfahrungsweise des ungebildeten Verstandes angepaßt sein. Beobachten wir die genannten Menschenklassen, so finden wir, daß sie gewöhnlich nach Hälften, Vierteln und halben Vierteln, demnächst nach Dritteln und halben Dritteln rechnen. Die Ausdrücke Achtel und Sechstel statt halber Viertel und halber Drittel hört man schon seltener; doch läßt sich dieß leicht erzielen, oder es kann auch umgangen werden. Genug, daß der große Haufe auf den Märkten vorzugsweise als Eintheilungszahlen die 2, 4, 3 und 6 wählt. Ein dem Alltagsverstande der Mehrzahl der Menschen angepaßtes Zahlen- und Rechnungs-, folglich auch jedes Maaß-System muß die genannten Zahlen als Eintheilungszahlen in sich aufnehmen. Sonst taugt es nicht zu den Rechnungen des gemeinen Mannes, welcher nicht Zeit hat, mit Feder und Dinte zu rechnen. Dieses ist der Fall bei dem Decimalsystem. In demselben kommt zwar die 2 als Theilungszahl vor, d. h., die Zahl 10 läßt sich durch 2 ohne Rest dividiren; aber keine andere jener bequemsten Theilungszahlen findet sich in der 10, ohne daß Brüche entstehen, welche der gemeine Mann scheut und darum zu umgehen sucht. Statt der 4, 3 und 6 hat die 10 noch die Theilungszahl 5. Diese ist aber schon als ungerade Zahl nicht die bequemste; denn der Ungebildete liebt die geraden Zahlen. Auch wird man finden, daß der gemeine Mann nie nach Fünfteln rechnet. Schon die viel anschaulichere 3 kommt ihm in die Quere, daher er das Dreifache in seiner Sprache das Drei-Doppelte nennt; bloß aus Bequemlichkeit und Vorliebe für die Zwei. Aus diesen Gründen behaupte ich, daß das Zwölfer-System viel einfacher, natürlicher und darum für den gemeinen Mann zweckmäßiger sei, als das Zehner-System. Denn die Zahl 12 läßt sich durch 2, 3, 4 und 6 ohne Rest theilen.

Für den Gelehrten ist gut predigen; und da derselbe sich bei seinen schriftlichen Rechnungen des Zehner-Systems bedient, so ist ihm das zehntheilige System bei'm schriftlichen Gebrauche sehr bequem. Einzig aber auch aus diesem Grunde. Wäre statt der Zehn die Zwölf die erste höhere Einheit, so fielen alle Gründe weg, welche jetzt für die Bequemlichkeit des Zehner-Systems aufgestellt werden. Auf die Bequemlichkeit eines Systems bei'm schriftlichen Gebrauche sieht aber der gemeine Mann nicht; er verlangt Zahlen, die sich, wie man zu sagen pflegt, leicht im Kopfe handhaben lassen, alle Bruchrechnungen, wegen ihres Mangels der Anschaulichkeit für ein ungeübtes Denkvermögen, scheuend.

Das Bisherige rechtfertigt zugleich die frühere Behauptung, daß die neue preußische Münzeintheilung sehr zweck-

Digitized by Google

mäßig sei, da der Silbergroschen in zwölf gleiche Theile eingetheilt ist.

7. Die unter dieser Nummer angeregte Unterscheidung des Längen- und Flächenmaaßes möchte, als für sich ganz klar unnöthig erscheinen. Allein die Erfahrung lehrt, daß dieß nicht immer der Fall ist. Darum muß mehrfach ausdrücklich der Accent darauf gelegt werden, daß Längenmaaß nicht Flächenmaaß, und daß z. B. der Aequator der Erde nicht 5400 Flächen-, sondern 5400 Längen-Meilen lang sei.

8. Das Cirkel-Instrument muß wohl vom Kreise, welcher wohl auch Cirkel genannt wird, unterschieden werden. Das Cirkel-Instrument dient dazu, um Kreis- (Cirkel-) Linien zu beschreiben, und um Entfernungen zu messen und zu bestimmen.

9. Diese mechanischen Aufgaben (mechanisch genannt, weil sie körperlich, nicht nur in der Vorstellung, sondern auch wirklich, sichtbar für's Auge, aufgelöset werden sollen) haben den Zweck, Auge und Hand zu üben. Ueberall im Unterrichte, also auch hier, verbinde man Einsicht mit Fertigkeit, Theorie mit Praxis.

10. Auch diese Aufgaben sind mechanisch, aber genau, zu lösen.

11. Man nimmt die gegebene gerade Linie zwischen die Endspitzen des Cirkels, indem man dieselben in die Endpunkte der geraden Linie setzt, sticht dann mit den Cirkelspitzen in der Peripherie des Kreises zwei Punkte ab, und verbindet sie durch eine gerade Linie.

12. Man legt die abzustechenden Linien, Winkel und Figuren, welche auf Papier gezeichnet sein müssen, auf ein Blatt weißen Papiers, sticht mit der Nadel durch die Endpunkte der Figur oder durch die erforderliche Anzahl Punkte, so daß die Stiche auf dem unteren Papiere sichtbar werden, und verbindet die Strichpunkte durch gerade Linien.

Ist die abzustechende Figur auf Holz oder einen andern festen Körper gezeichnet, so kann man sich eines sehr dünnen, durchsichtigen (gut geölten) Papieres bedienen, welches man über die abzustechende Figur bringt.

13. Um ein △ vermittelst des Cirkels nachzuzeichnen, macht man zuerst eine gerade Linie gleich einer Seite des △, beschreibt dann aus den beiden Endpunkten der geraden Linie 2 Kreisbogen, indem man das eine Mal die zweite, das andre Mal die dritte Seite des △ zwischen die Cirkelspitzen nimmt; dann verbindet man den Punkt, in welchem die beiden Kreisbogen einander durchschneiden, mit den Endpunkten der zuerst gezogenen geraden Linie.

Ein gegebenes Viereck, Fünfeck u. s. w. theilt man durch eine oder mehrere Diagonalen in Dreiecke und zeichnet in

Digitized by Google

richtiger Lage die einzelnen Dreiecke nach, indem man jedes Mal die Seiten derselben zwischen den Cirkel bringt.

14 u. 15. Man halte darauf, daß diesen Aufforderungen mit augenfälliger Genauigkeit entsprochen werde.

16. Die Peripherie des Kreises wird in 360 gleiche Theile getheilt. Jeden dieser Theile nennt man Grad. Der Grad ist also ein Bogen = dem 360sten Theile der ganzen Peripherie. Den Gradbogen theilt man wieder in 60 gleiche Theile und nennt einen dieser Theile einen Minutenbogen (Minute); der Minutenbogen wird in 60 gleiche Theile getheilt, welche Theile Sekundenbogen heißen. Die Peripherie des Kreises hat demnach 360 Grade = 360.60 Minuten = 360.60.60 Sekunden. — Die Sekunden, Minuten und Grade der Peripherie müssen wohl von den gleichbenannten Theilen der Zeit, der Entfernung und von den Größen, welche man am Barometer, Thermometer u. s. w. Grade nennt, unterschieden werden.

17. Durch jeden Punkt einer Ebene kann man zwei gerade Linien ziehen, welche in dieser Ebene wechselweise senkrecht aufeinander stehen. Es entstehen dadurch 4 rechte Winkel, welche den ganzen Raum der Ebene, um den Punkt herum, ausfüllen. Liegen diese 4 rechten Winkel an dem Mittelpunkte eines Kreises, so werden sie von der ganzen Peripherie des Kreises bespannt.

18. Unmittelbar folgt daraus, daß die Größe des Winkels am Mittelpunkte des Kreises die Größe des Bogens, welcher zwischen den Schenkeln dieses Winkels liegt, also auch die Anzahl der Grade der Peripherie, bestimmt.

Der rechte Winkel ist bespannt von 90 Graden (90°);

2 R	=	sind	=	180	= ;
3 R	=	=	=	270	= ;
4 R	=	=	=	360	= ;
½ R	=	=	=	45	= ;
¼ R	=	=	=	22½	= ;
⅔ R	=	=	=	60	= ;
⅓ R	=	=	=	18	= ;
⅙ R	=	=	=	15	= ;
1/80 R	=	=	=	3	= ;
1/90 R	=	=	=	1	= .

19. Vergleichen wir die Größe zweier Winkel am Mittelpunkte eines Kreises mit den Graden, welche ihre Schenkel zwischen sich fassen, so finden wir dasselbe Verhältniß; z. B. dem rechten Winkel entsprechen 90°, und einem Winkel = 2 R entsprechen 180° u. s. w. Die Winkel am Mittelpunkte eines

Kreises verhalten sich daher zu einander, wie die Bogen der Peripherie, auf welchen sie stehen; und jeder Winkel am Mittelpunkte ist der so vielste Theil von 4 R, der so vielste Theil der ihn bespannende Bogen von der ganzen Peripherie ist. Verhält sich daher ein Centriwinkel zu 4R = 1 : 4; = 2 : 4; = 1 : 3; = 3 : 4; allgemein = m : n: so steht der Bogen dieses Centriwinkels zu der ganzen Peripherie des Kreises in demselben Verhältnisse.

20. Aus diesen Gründen kann der Bogen, welcher einen Winkel am Mittelpunkte bespannt, als ein Maaß desselben angesehen werden; d. h., die Größe des Bogens bestimmt das Verhältniß des Winkels zu 4, also auch zu 1 R. Um daher einen Winkel durch Grade, Minuten u. s. w. zu messen, beschreibt man aus dem Scheitelpunkte des Winkels mit beliebiger Cirkelöffnung einen Kreis, und bestimmt, wie viel Grade, Minuten ꝛc. der zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Bogen enthält.

21. Sagt man daher, ein Winkel sei = 90°, = 100°, = 20°, so heißt dieß: der betreffende Winkel wird von einem Bogen gemessen, welcher solcher Theile 90, 100, 20 hat, deren die ganze Kreisperipherie 360 hat.

22. Dem halben rechten Winkel entspricht ein Bogen von 45°; man sagt daher auch: $\frac{1}{2}$ R = 45°; $\frac{2}{3}$ R = 60°; $\frac{5}{4}$ R = 112½°.

23. Diese Frage wird den aufmerksamen Schüler nicht in Verlegenheit setzen. Die Grade, Minuten u. s. w. bezeichnen nicht bestimmte Längen oder absolute Größen, sondern sie stellen nur Verhältnisse auf; sie bezeichnen relative Größen, nämlich die Verhältnisse der Theile der Peripherie zur ganzen, und dadurch die Verhältnisse der Winkel zur Größe des rechten Winkels. Es kann daher im Allgemeinen gar nicht angegeben werden, wie groß ein Grad u. s. w. an sich sei, welche Größe er habe in Fuß, Zoll u. s. w. Die absolute Größe eines Grades hängt von der Größe der Kreisperipherie, zu welcher er gehört, ab, und nur dann, wenn die Länge einer Peripherie nach Fuß, Zoll u. s. w. bestimmt ist, läßt sich auch die Länge eines Grades, einer Minute u. s. w. in Fuß, Zoll u. s. w. angeben. Die Grade eines großen Kreises sind groß, die eines kleinen klein. Die Größe des Winkels hängt ja auch nicht von der Länge der Grade, sondern nur von ihrer Neigung zu einander, also auch nur von dem Verhältnisse der Größe seines Bogens zur Größe der ganzen Peripherie ab.

24. Derjenige Bogen, welcher einen Grad groß ist, oder der Gradbogen, bespannt denjenigen Winkel, welcher darum einen Grad groß ist; der Gradbogen mißt den Gradwinkel,

Digitized by Google

der Minutenbogen den Minutenwinkel, der Sekundenbogen den Sekundenwinkel.

25. Das Maaß der Bogen kann daher auch zum Maaß der Winkel dienen, und daher werden die Zeichen (°), (′), (″), welche den Grad, die Minute und die Sekunde des Bogens bezeichnen, auch für die Größe der Winkel nach Graden, Minuten und Sekunden gebraucht.

26. Die Bezeichnung 45° 20′ 12″ drückt sowohl die Größe des Bogens, welcher 45 Grade, 20 Minuten und 12 Sekunden groß ist, aus, wie auch die Größe des von diesem Bogen gemessenen Winkels. — Man verwechsele die Zeichen (°), (′), (″), wenn sie zur Bezeichnung der Größe eines Winkels oder Bogens dienen, nicht mit denselben Zeichen, wenn sie als Zeichen der Ruthe, des Fußes und des Zolles gesetzt sind.

27. u. 28. Allerdings gehört die Uebereinstimmung der alten Völker in der Theilung der Kreisperipherie zu den bemerkenswerthen Erscheinungen. Die Betrachtung der Eigenschaften der Zahl 360 erklärt uns dieselbe. Wenn wir bedenken, daß wir Größen, welche durch ganze Zahlen bezeichnet sind, weit leichter überschauen, als solche, denen Brüche angehängt sind, so wird es einleuchten, daß die denkenden Erfinder einer häufig anzuwendenden Eintheilungszahl vorzugsweise eine solche wählten, welche die Eigenschaft besitzt, daß sie sich durch viele Zahlen ohne Rest theilen läßt. Und diesen Vorzug besitzt die Zahl 360. In dem ganzen Umfange aller Zahlen von 1 bis 400 findet sich keine, welche so viele Theiler hat, wie 360. Darum haben die Alten diese Zahl als Eintheilungszahl der Kreisperipherie gewählt. Ihre Theiler sind:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 90 ꝛc.

29. Der Transporteur (Winkelmesser) ist ein Instrument, mit welchem man leicht und schnell die Größe der Winkel, deren Schenkel auf Papier u. s. w. gezeichnet sind, bestimmen kann. Er ist eine Art Winkelmesser. Am einfachsten schneidet man ihn in Papier oder Pappe aus, nachdem man einen Kreis, Halbkreis oder Quadranten beschrieben und seine Peripherie in Grade oder halbe Grade getheilt hat.

30. Will man einen gegebenen Winkel oder Bogen vermittelst des Transporteurs messen, d. h. bestimmen, wie viel Grade der Winkel oder Bogen hat, so legt man den Mittelpunkt des Transporteurs an den Scheitelpunkt des Winkels, und eine Seitenlinie des Transporteurs an den einen Schenkel des Winkels hin, so daß beide sich decken; alsdann bestimmt der andere Schenkel des Winkels, welcher, wenn es nöthig ist, verlängert werden muß, die Zahl der Grade des zu messenden Winkels oder des ihn bespannenden Bogens.

Digitized by Google

31. Soll vermittels eines Transporteurs ein in Graden gegebener Winkel verzeichnet werden, so zieht man eine gerade Linie, legt die eine Seitenlinie des Transporteurs so, daß beide einander decken, zählt nun auf dem Bogen desselben die Anzahl der Grade ab, welche dem gegebenen Winkel entsprechen, und bemerkt die Stelle dieser Zahl auf dem Papiere durch einen Punkt. Diesen Punkt verbindet man durch eine gerade Linie mit dem Punkte, welcher die Lage des Mittelpunktes des Transporteurs bezeichnet; alsdann ist der verlangte Winkel gezeichnet.

32. Aus Nro. 30 folgt unmittelbar, wie man die Winkel einer geradlinigen Figur mittels des Transporteurs mißt. Haben die Schenkel der messenden Winkel nicht die erforderliche Länge, so giebt man ihnen dieselbe.

---

33. Da nur gleichartige Größen mit einander verglichen und gemessen werden können, so wird das Grundmaaß für Flächengrößen auch eine Fläche sein. Man mißt Flächen mit Ebenen, welche eben so lang als breit sind, d. h. mit Quadratebenen.

34. Eine Quadratmeile ist eine rechtwinklige vierseitige Ebene, deren Seiten alle 1 Meile lang sind. Quadratfuß heißt diejenige Quadratebene, deren Seite 1 Fuß lang ist. Hiernach ist es für sich klar, was man unter Quadratzoll und unter Quadratlinie versteht.

35. Wenn die Seite eines Quadrats 1 Decimalfuß lang ist, so heißt dessen Quadrat Quadrat-Decimalfuß. Hat die Seite die Länge eines Decimalzolles, Duodecimalfußes oder Duodecimalzolles, so heißt das darüber beschriebene Quadrat Quadrat-Decimalzoll, Quadrat-Duodecimalfuß und Quadrat-Duodecimalzoll.

36. Einige Schriftsteller bedienen sich des Ausdrucks Decimal-Quadratzoll statt Quadrat-Decimalzoll. Jener Ausdruck aber ist zum wenigsten zweideutig. Nach den Regeln der Wortzusammensetzung in der deutschen Sprache heißt Decimal-Quadratzoll ein Quadratzoll, welcher zehntheilig genommen oder in 10 gleiche Theile getheilt wird, oder wie man es sonst noch verstehen könnte. Ein Quadrat-Decimalzoll aber heißt ein Decimalzoll, von welchem das Quadrat gebildet ist. Da letzteres allein der Sache entspricht, so sind die Ausdrücke Duodecimal-Quadratfuß u. s. w. zu vermeiden, und statt Zehntel-Quadratzoll ist Quadrat-Zehntelzoll zu setzen, wenn anders dadurch ausgedrückt werden soll, daß von dem Quadrate eines Zehntelzolles die Rede ist.

37. Die Anzahl der Quadratfuß eines Quadrats, dessen Seite eine Anzahl Längenfuß enthält, wird gefunden, wenn man die

Digitized by Google

Zahl der Längenfuß mit sich selbst multiplicirt. Hat z. B. die Seite eines Quadrats 6′ Länge, so ist die Fläche desselben = 6.6 = 36 Quadratfuß = 36□′ (Fig. 70). Ein Quadrat, dessen Seite 12′, 20′ oder n′ lang ist, enthält 12.12 = 144□′, 20.20 = 400□′, n.n□′. Von der Wahrheit dieser Sätze überzeugt uns die Anschauung.

38. Wird die Längen-Ruthe in 10 und 12 gleiche Theile getheilt, so enthält das Quadrat derselben 100 und 144 Quadratfuß.

39. Nach der Decimal-Eintheilung enthält der Quadratfuß 10.10 = 100□″, nach der Duodecimal-Eintheilung 12.12 = 144□″.

40. Die Längenruthe ist nach der zehntheiligen Eintheilung = 10′ = 100″ = 1000‴. Folglich enthält nach dieser Eintheilung
die Quadratruthe 10.10 = 100□′
= = 100.100 = 10000□″
= = 1000.1000 = 1000000□‴.

Die Längenruthe ist nach der zwölftheiligen Eintheilung = 12′ = 144″ = 1728‴. Also ist nach dieser Eintheilung
die Quadratruthe = 12 . 12 = 144□′
= = = 144 . 144 = 20736□″
= = = 1728 . 1728 = 2985984□‴.

41. Der Quadratfuß hat zehntheilig 10 . 10 = 100□″;
= = = zwölftheilig 12 . 12 = 144□″.
= Quadratzoll hat zehntheilig 10 . 10 = 100□‴;
= = = zwölftheilig 12 . 12 = 144□‴.

42 u. 43. Aus diesen Beispielen wird es klar, wie Quadratflächen höherer Einheiten in Quadratflächen niederer Einheiten verwandelt würden, und wie die umgekehrte Aufgabe aufgelöset wird. Vorzüglich muß zugesehen werden, ob von der zehn- oder zwölftheiligen Eintheilung die Rede ist.

Nach der Decimaleintheilung ist — wenn q Quadrat heißt,
$1.q^{0} = 100.q' = 10000.q'' = 1000000.q'''$;
$1.q' = 100.q'' = 10000.q'''$;
$1.q'' = 100.q'''$. Daraus folgt, daß
$1.q''' = {}^{1}/_{100}.q'' = {}^{1}/_{10000}.q' = {}^{1}/_{1000000}.q^{0}$;
$1.q'' = {}^{1}/_{100}.q' = {}^{1}/_{10000}.q^{0}$;
$1.q' = {}^{1}/_{100}.q^{0}$.

Nach der Duodecimaleintheilung ist
$1.q^{0} = 144.q' = 20736.q'' = 2985984.q'''$;
$1.q' = 144.q'' = 20736.q'''$;
$1.q'' = 144.q'''$. Daraus folgt, daß
$1.q''' = {}^{1}/_{144}.q'' = {}^{1}/_{20736}.q' = {}^{1}/_{2985984}.q^{0}$;
$1.q'' = {}^{1}/_{144}.q' = {}^{1}/_{20736}.q^{0}$;
$1.q' = {}^{1}/_{144}.q^{0}$.

Digitized by Google

44. Fassen wir die Längenruthe als eine unveränderliche Größe auf, so ist es begreiflich, daß der zehnte Theil derselben, d. h. der Decimalfuß größer ist als der zwölfte Theil, d. h. als der Duodecimalfuß; daß der hundertste Theil derselben größer ist als der hundertvierundvierzigste, d. h. daß der Decimal-Quadratfuß größer ist als der Duodecimal-Quadratfuß u. s. w.

Die Größe des Längen-Decimalfußes zur Größe des Längen-Duodecimalfußes verhält sich $= {}^1/_{10} : {}^1/_{12} = 12 : 10 = 6 : 5$; die Größe des Quadrat-Decimalfußes verhält sich zur Größe des Quadrat-Duodecimalfußes $= {}^1/_{100} : {}^1/_{144} = 144 : 100$.

45. Die Anzahl der Quadrateinheiten einer Quadratfläche zu finden, oder ein Quadrat auszumessen, zu berechnen, ist sehr einfach, wenn die Länge einer Seite desselben gegeben ist. Ist z. B. die Seite eines Quadrats $= 10^0$, so theile man 2 aneinander liegende Seiten des Quadrats in 10 gleiche Theile, und ziehe, auf dieselbe Art wie in Fig. 70, die Theilungslinien; alsdann lehrt der Augenschein, daß dieses Quadrat aus $10.10 = 100$ Quadratruthen bestehe. Da die Länge der Seiten des Quadrats in Ruthen ausgedrückt ist, so ist hier die Quadratruthe die Quadrateinheit. Man findet daher im Allgemeinen die Anzahl der Quadrateinheiten, welche irgend eine Quadratfläche enthält, wenn man die Zahl, welche die Länge der Seite des Quadrats mißt, mit sich selbst multiplicirt.

Wenn die Seite eines Quadrats $= 8'\ 4''$ dc, so ist die Fläche $= 84.84 = 7056.\text{q}'' = 70.\text{q}' + 56.\text{q}''$. —

Ist die Seite des Quadrats $= 12'\ 3''\ 8'''$ d.dc., so drücke man die Länge der Seite in Linien aus, multiplicire diese Zahl mit sich selbst, und bringe sie dann auf höhere Einheiten. Dieß geschieht so:

$12'\ 3''\ 8'''$ d.dc. $= (12.12+3).12+8 = 147.12+8$
$= 1772'''$ d.dc. Diese mit sich selbst multiplicirt ꝛc.

Ist allgemein die Seite eines Quadrats $= a^0\ b'\ c''$ (dc.), so muß man die höhern Einheiten in niedere, und zwar in unserm Beispiele die $a^0\ b'$ in Zoll verwandeln, die Anzahl der Zoll mit sich selbst multipliciren und dieses Produkt demnächst in höhere Einheiten verwandeln.

$a^0\ b'\ c''$ dc. $= (100a + 10b + c)''$ dc. u. s. w.

46. So wie man aus der gegebenen Seite des Quadrats die Größe der Fläche desselben finden kann, so muß umgekehrt aus der gegebenen Größe der Fläche die Größe der Seite bestimmt werden können. So wie jenes dadurch geschah, daß die Zahl, welche die Anzahl der Einheiten der Seite enthielt, mit sich selbst multiplicirt wurde; so geschieht dieses dadurch, daß man

Digitized by Google

eine Zahl sucht, welche, mit sich selbst multiplicirt, das gegebene Produkt hervorbringt. Wer mit der Ausziehung der Quadratwurzel bekannt ist, weiß, daß dieselbe hier angewendet wird. Auch wird es aus dieser Einerleiheit (Identität) formeller und arithmetischer Verhältnisse einleuchtend, warum man das Produkt einer Zahl in sich selbst das Quadrat oder die Quadratzahl dieser Zahl genannt hat.

Die vorliegenden Beispiele sind so leicht, daß es sich auf den ersten Blick ergiebt, wie groß die Seite des Quadrats sei. Ist der Flächeninh. des Q. = 64□′, so ist d. Seite = 8′

= = = = = 81□′ = = = = 9′
= = = = = 256□′ = = = = 16′
= = = = = 100□″ = = = = 10″
= = = = = 625□″ = = = = 25″
= = = = = 1000□‴ = = = > 31‴ u. < 32‴
= = = = = n□′ = = = = der Quadratwurzel aus n□′.
= = = = = a□° b□′ c□′ d□′ dc. u. d.dc-Maaß,

so müssen vorerst die höheren Einheiten in niedere, sowohl nach der zehn- als zwölftheiligen Eintheilung verwandelt werden.

a□°+b□′+c□″+d□‴dc. = (1000000.a+10000b+100.c+d)□‴dc.

= = = = = d.dc = (2985984.a+20736b+144.c+d)□‴ddc.

Nun zieht man aus diesen Summen die Quadratwurzel, und verwandelt alsdann die gefundene Anzahl der Linien in Zoll, Fuß und Ruthen.

47. Man theile, wie in Fig. 71, die längere Seite des Rechtecks in 4, die kleinere in 2 gleiche Theile, und ziehe die Parallelen; so ergiebt sich von selbst, daß die Anzahl der Flächeneinheiten (hier der Quadratfuß) des Rechtecks gefunden wird, wenn man die beiden Zahlen 4 und 2 mit einander multiplicirt. Da 4.2 = 8 ist, so enthält das Rechteck 8 Quadratfuß.

48. Man findet also die Anzahl der Flächeneinheiten, welche ein Rechteck enthält, dadurch, daß man die beiden Zahlen, durch welche die Größe der an einander liegenden Seiten ausgedrückt ist, mit einander multiplicirt. Es versteht sich von selbst, daß diese beiden Seiten in einerlei Einheiten ausgedrückt sein müssen. Wo dieß nicht der Fall ist, da bewirke man es vor der Multiplication!

Wenn die beiden Seiten des Rechtecks ausgedrückt sind durch

1) 8′ und 5′ dc., so ist die Fläche = 8.5 = 40□′.
2) 5°4′—11′ dc. = = = = = (5.10+4).11 =
3) 12′4″—20′5″ d.dc. = = = (12.12+4).(20.12+5) =
4) 30′5″4‴—10′2″6‴ dc. = = = (30.100+5.10+4).
(10.100+2.10+6) =

Digitized by Google

5) $10^{\circ}\,9'' - 4'\,5'''$ d.dc., so ist d. Fl. $= (10.1728 + 9.12).(4.144 + 5) =$

6) $n' - m'$ $\quad = \quad = \quad = \quad = n.m^{\square'}$ dc. und d.dc.

7) $a^{o}b'$ u. $c'd''$, so ist d. Fläche $= (a.144 + b.12).(c.12 + d)^{\square''}$ d.dc.
u. $(a.100 + b.10).(c.10 + d)^{\square''}$ dc.

8) $p'q''$ u. $r^{o}s'' \quad = \quad = \quad = \quad = (p.12 + q).(r.144 + s)^{\square''}$ d.dc.
u. $(p.10 + q).(r.100 + s)^{\square''}$ dc.

49. Wenn die Fläche eines Rechtecks gegeben ist, so muß die dieselbe ausdrückende Zahl als ein Produkt zweier Faktoren angesehen werden; man hat also diese beiden Faktoren zu suchen. Da nun jede Zahl durch das Produkt unzählig vieler Zahlenpaare entstehen kann, so ist diese Aufgabe unbestimmt. Sollen nur ganze Zahlen als Faktoren zugelassen werden, so bleibt die Aufgabe zwar in der Regel eine unbestimmte; aber die Zahl der Auflösungen ist dadurch sehr beschränkt. Nehmen wir für die Aufgaben der 49sten Nummer Letzteres an, so haben zwei an einander liegende Seiten des Rechtecks, wenn die Fläche desselben

$= 20^{\square'}$ ist, die Größe $20'$ u. $1'$ od. $10'$ u. $2'$, od. $5'$ u. $4'$.

$= 64^{\square''} \quad = \quad = \quad = 64''$ u. $1'' = 32''$ u. $2'' = 16''$ u. $4''$ u. s. w.

$= 360^{\square^{o}} \quad = \quad = \quad = 360^{\circ}$ u. $1^{\circ} = 180^{\circ}$ u. $2^{\circ} = 90^{\circ}$ u. 4° u. s. w.

50. Sollen Ruthen, Fuß, Zoll zehn- oder zwölftheiligen Maaßes in Ruthen, Fuß, Zoll zwölf- und zehntheiligen Maaßes verwandelt werden, so thut man am besten, zuerst die angegebenen Fuß, Zoll und Linien in Theilen der Ruthe auszudrücken, weil die Ruthe als beständige Größe angesehen wird. Darauf multiplicirt man alle Größen mit 12, wenn zehntheiliges Maaß in zwölftheiliges, und man multiplicirt mit 10, wenn zwölftheiliges in zehntheiliges verwandelt werden soll.

Beispiel. $40^{\circ}\,6'\,4''$ dc. sollen in ddc maaß verwandelt werden. $40^{\circ}\,6'\,4'' = (40 + {}^{6}/_{10} + {}^{4}/_{100})^{\circ}$. Da nun jede Ruthe nach dem zwölftheiligen Maaße $12'$ enthält, so multiplicirt man diesen Ausdruck in Ruthen mit 12. Dieß giebt

$$40 \cdot 12 + \frac{6 \cdot 12}{10} + \frac{4 \cdot 12}{100} = 480 + {}^{72}/_{10} + {}^{48}/_{100}$$
$$= 487 + {}^{2}/_{10} + {}^{48}/_{100}$$
$$= 487 + {}^{68}/_{100}$$
$$= 487{,}68 \text{ Fuß ddc.}$$
$$= 40^{\circ}\,7'\,8{,}16'' \text{ ddc.}$$

51. $100^{\circ}\,11'\,7''\,8'''$ ddc. sollen in dc. verwandelt werden.

$$100^{\circ}11'7''8'' = (100 + {}^{11}/_{12} + {}^{7}/_{144} + {}^{8}/_{1728})^{\circ}$$
$$= \left(100.10 + \frac{11 \cdot 10}{12} + \frac{7 \cdot 10}{144} + \frac{8 \cdot 10}{1728}\right)', \text{ oder}$$

Digitized by Google

$$= \left(100.10.10 + \frac{11.10.10}{12} + \frac{7.10.10}{144} + \frac{8.10.10}{1728}\right)'', \text{ oder}$$

$$= \left(100.1000 + \frac{11.1000}{12} + \frac{7.1000}{144} + \frac{8.1000}{1728}\right)''' \text{ ꝛc.}$$

$$= 100^{\circ}\ 9'\ 6''\ 9^{49}/_{54}''' \text{ dc.}$$

52. Auf ähnliche Art verwandelt man Quadratflächen des zehntheiligen Maaßes in Quadratflächen des zwölftheiligen, und umgekehrt.

Beispiel. $64^{\square\prime}\ 72^{\square\prime\prime}$ dc in ddc.

$$64^{\square\prime}\ 72^{\square\prime\prime} = ({}^{64}/_{100} + {}^{72}/_{10000})^{\square\circ} \text{ dc.}$$

$$= \left(\frac{64 \cdot 144}{100} + \frac{72 \cdot 144}{10000}\right)^{\square\prime} \text{ ddc.}$$

$$= 93^{\square\prime}\ 28^{212}/_{625}{}^{\square\prime\prime} \text{ ddc.}$$

53. $120^{\square\circ}\ 112^{\square\prime}\ 140^{\square\prime\prime}$ ddc.

$$= (120 + {}^{112}/_{144} + {}^{140}/_{20736})^{\square\circ} \text{ ddc.}$$

$$= \left(120 \cdot 100 + \frac{112 \cdot 100}{144} + \frac{140 \cdot 100}{20736}\right)^{\square\prime} \text{ dc.}$$

$$= \left(120 \cdot 10000 + \frac{112.10000}{144} + \frac{140.10000}{20736}\right)^{\square\prime\prime} \text{ dc.}$$

$$= 120^{\square\circ}\ 78^{\square\prime}\ 45^{95}/_{324}{}^{\square\prime\prime} \text{ dc.}$$

54. Um ein Quadrat oder Rechteck oder Parallelogramm in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, braucht man nur eine Seite der Figur in so viel gleiche Theile zu theilen, als verlangt werden, und demnächst durch die Theilungspunkte mit den anliegenden Seiten Parallelen zu ziehen. So lehrt es unmittelbar die Anschauung. In Fig. 72 ist das Rechteck in 3 gleiche Theile getheilt.

55. Die Ausführung dieser Forderung ist sehr leicht. Man wird durch unmittelbare Anschauung sogleich finden, daß die Seiten und zugehörigen Flächenräume durch folgende Zahlen ausgedrückt werden:

Seitenmaaß	:	Flächenmaaß
1	. . . .	1
2	. . . .	4
3	. . . .	9
4	. . . .	16
5	. . . .	25
6	. . . .	36
7	. . . .	49
8	. . . .	64
9	. . . .	81
10	. . . .	100

56. Quadratzahlen im eigentlichen Sinne nennt man diejenigen Zahlen, welche die Größe der Fläche eines Quadrats angeben.

Digitized by Google

Diejenige Zahl, welche die Größe einer Seite des Quadrats bestimmt, heißt die Quadratwurzel der Quadratzahl. Im arithmetischen Sinne heißen diejenigen Zahlen Quadratzahlen, welche Produkte zweier gleichen Faktoren sind; jeder dieser Faktoren heißt die Quadratwurzel der Quadratzahl.

57. Wenn die Zahlenpaare 4 und 5, oder allgemein m und n, die Größe der Seiten zweier Quadrate, in demselben Maaße ausgedrückt, bezeichnen, so verhalten sich ihre Flächenräume

$= 4.4 : 5.5 = 16 : 25$, allgemein $= m.m : n.n$.

Und wenn 64 u. 100, oder allgemein m u. n die Größe der Flächen zweier Quadrate, in derselben Einheit ausgedrückt, darstellen, so verhalten sich die Seiten beider Quadrate zu einander

$= 8 : 10$, oder allgemein $= \sqrt[2]{m} : \sqrt[2]{n}$

58. Eine Figur **verjüngen** heißt: in kleinerem Maaßstabe eine Figur zeichnen, welche der gegebenen Figur ähnlich ist, oder mit derselben ganz gleiche Form hat. Alle unsere Landkarten, Risse von Gebäuden und Grundstücken stellen verjüngte Figuren dar. Die meisten Zeichnungen werden in verjüngtem oder verkleinertem Maaßstabe aufgenommen. Die Zeichner, die praktischen Geometer u. s. w. können daher den verjüngten Maaßstab gar nicht entbehren; auch ist es eine sehr gute Uebung, wenn der Schüler den verjüngten Maaßstab genau kennen und gebrauchen lernt. Ohne diese Kenntniß wird er nicht einmal eine sichere Vorstellung von einer Landkarte gewinnen. Da man nun denjenigen Gegenstand durch und durch kennen lernt, welchen man selbst anfertigt, so veranlasse man den Schüler, sich einen verjüngten Maaßstab selbst zu machen. Eine kleine Anleitung wird ihn dazu in den Stand setzen, und wenn man sich die Mühe nimmt, einen solchen vor seinen Augen, z. B. auf der Schultafel, entstehen zu lassen, so wird er auch den Nutzen und den Gebrauch der Querlinien des Maaßstabes alsbald einsehen. Hat er sich nun selbst einen solchen in Pappe nachgebildet, so gebe man ihm gezeichnete Figuren, mit der Aufgabe, dieselben in kleinerem, also in verjüngtem, oder auch in größerem, Maaßstabe darzustellen. Eine sehr nützliche Uebung!

59. Da in einem frühern Kapitel die Zeit der Betrachtung unterworfen worden, und in diesem Kapitel die Rede ist von der Ausmessung mathematischer (stetiger — der Raum- und Zeit-) Größen, so möge auch hier von der Ausmessung der Zeit die Rede sein.

So wie man verschiedene Größen als Maaß-Einheiten räumlich ausgedehnter Gegenstände angenommen hat, so giebt es auch

Digitized by Google

verschiedene Maaße für den Abfluß der Zeit. Man bestimmt Zeitlängen nach Sekunden, Minuten, Stunden, Tagen, Wochen, Jahrzehenden, Jahrhunderten, Jahrtausenden u. s. w. Wie lang an sich eins dieser Zeitmaaße sei, ist unbestimmbar. Durch Erfahrung und Anschauung muß man gelernt haben, was eine Sekunde, eine Stunde u. s. w. ist. — Da die Zeit eine stetige Größe ist, so giebt es kein Größtes und kein Kleinstes der Zeit. Zeit ist eine unvollendbare Vorstellung.

60. Zwischen einer Zeitsekunde und einem Jahrtausend liegen unzählig viele Zeitgrößen. Die meisten von denen, nach welchen wir unsere Zeitrechnung bestimmen, sind unter der vorigen Nummer genannt worden.

Zusatz. Die unter den Nummern 6, 50, 51, 52, 53 angeregten Gegenstände mögen hier noch etwas genauer gefaßt und allgemeiner behandelt werden.

1. Nach der Duodecimal-Eintheilung ist
$1^\circ = 12'$; $1' = 12''$; $1'' = 12'''$ — folglich $1''' = {}^1/_{12}''$; $1'' = {}^1/_{12}'$; $1' = {}^1/_{12}{}^\circ$, und $1^\circ = 12' = 144'' = 1728'''$, und $1''' = {}^1/_{12}'' = {}^1/_{144}' = {}^1/_{1728}{}^\circ$.
2. Nach der Decimal-Eintheilung ist
$1^\circ = 10'$; $1' = 10''$; $1'' = 10'''$ — folglich $1''' = {}^1/_{10}''$; $1'' = {}^1/_{10}'$; $1' = {}^1/_{10}{}^\circ$; und $1^\circ = 10' = 100'' = 1000'''$; und $1''' = {}^1/_{10}'' = {}^1/_{100}' = {}^1/_{1000}{}^\circ$.
3. Verwandlungsformeln dieser Maaße, wenn a, b, c, d beliebige Ziffern bezeichnen.

a) $a^\circ\ b'\ c''\ d'''$ Duodecimalmaaß sollen verwandelt werden in Ruthen, dann in Fuß, in Zoll, in Linien.

$$a^\circ\ b'\ c''\ d'''\ \text{ddc.} = \left(a + \frac{b}{12} + \frac{c}{144} + \frac{d}{1728}\right)^\circ$$
$$= \left(a.12 + b + \frac{c}{12} + \frac{d}{144}\right)'$$
$$= \left(a.144 + b.12 + c + \frac{d}{12}\right)''$$
$$= \left(a.1728 + b.144 + c.12 + d\right)'''.$$

b) $a^\circ\ b'\ c''\ d'''$ dc. sollen in Ruthen, Fuß, Zoll und Linien ausgedrückt werden.

$$a^\circ\ b'\ c''\ d'''\ \text{dc.} = \left(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000}\right)^\circ$$
$$= \left(a.10 + b + \frac{c}{10} + \frac{d}{100}\right)'$$

Digitized by Google

$$= \left(a.100 + b.10 + c + \frac{d}{10}\right)''$$
$$= \left(a.1000 + b.100 + c.10 + d\right)'''.$$

Bedient man sich der bei den Decimalbrüchen gebräuchlichen Bezeichnungsweise, so kann man diese 4 Ausdrücke ganz kurz so neben einander stellen:

$a^0\ b'\ c''\ d'''\ dc. = a^0,bcd = ab',cd = abc'',d = abcd'''\ dc.$

c) $a^0\ b'\ c''\ d'''\ ddc.$ sollen verwandelt werden in demaaß.

$$a^0 b' c'' d'''\ ddc. = \left(a + \frac{b}{12} + \frac{c}{144} + \frac{d}{1728}\right)^0\ ddc.$$
$$= \left(a.10 + \frac{b.10}{12} + \frac{c.10}{144} + \frac{d.10}{1728}\right)'\ dc.$$
$$= \left(a.100 + \frac{b.100}{12} + \frac{c.100}{144} + \frac{d.100}{1728}\right)''\ dc.$$
$$= \left(a.1000 + \frac{b.1000}{12} + \frac{c.1000}{144} + \frac{d.1000}{1728}\right)'''\ dc.$$

d) $a^0\ b'\ c''\ d'''\ dc.$ sollen verwandelt werden in ddemaaß.

$$a^0\ b'\ c''\ d'''\ dc. = \left(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000}\right)^0 dc.$$
$$= \left(a.12 + \frac{b.12}{10} + \frac{c.12}{100} + \frac{d.12}{1000}\right)'\ ddc.$$
$$= (a.12 + b.1{,}2 + c.0{,}12 + d.0{,}012)'\ ddc.$$
$$= (a.144 + b.14{,}4 + c.1{,}44 + d.0{,}144)''\ ddc.$$
$$= (a.1728 + b.172{,}8 + c.17{,}28 + d.1{,}728)'''\ ddc.$$

4. Nach der Duodecimaleintheilung ist
$1\square^0 = 144\square'$; $1' = 144\square''$; $1\square'' = 144\square'''$; folglich $1\square''' = 1/144\square''$; $1\square'' = 1/144\square'$; $1\square' = 1/144\square^0$, und (q bedeute Quadrat)
$1.q^0 = 144.q' = 20736.q'' = 2985984.q'''$, und
$1.q''' = 1/144.q'' = 1/20736 \cdot q' = 1/2985984 \cdot q^0$.

5. Nach der Decimalrechnung ist
$1.q^0 = 100.q'$; $1.q' = 100.q''$; $1.q'' = 100.q'''$; folglich
$1.q''' = 1/100.q''$; $1.q'' = 1/100.q'$; $1.q' = 1/100.q^0$, und
$1.q^0 = 100.q' = 10000.q'' = 1000000.q'''$, und
$1.q''' = 1/100.q'' = 1/10000 \cdot q' = 1/1000000 \cdot q^0$.

6. Verwandlungsformeln dieser Maaße, wenn a, b, c, d beliebige Ziffern bezeichnen.

a) Ausdrücke für das Quadrat-Duodecimalmaaß in Ruthen, dann in Fuß, in Zoll, Linien.

Digitized by Google

$$a.q^0+b.q'+c.q''+d.q'''\,\text{ddc.} = \left(a+\frac{b}{144}+\frac{c}{20736}+\frac{d}{2985984}\right)q^0\,\text{ddc.}$$
$$= \left(a.144+b+\frac{c}{144}+\frac{d}{20736}\right)q'\,\text{ddc.}$$
$$= \left(a.20736+b.144+c+\frac{d}{144}\right)q''\,\text{ddc.}$$
$$= (a.2985984+b.20736+c.144+d)q'''\text{ddc.}$$

b) Ausdrücke für das Quadrat-Decimalmaaß in Ruthen, Fuß, Zoll und Linien.

$$a.q^0+b.q'+c.q''+d\,q'''\,\text{dc.} = \left(a+\frac{b}{100}+\frac{c}{10000}+\frac{d}{1000000}\right)q^0\,\text{dc.}$$
$$= \left(a.100+b+\frac{c}{100}+\frac{d}{10000}\right)q'\,\text{dc.}$$
$$= \left(a.10000+b.100+c+\frac{d}{100}\right)q''\,\text{dc.}$$
$$= (a.1000000+b.10000+c.100+d)q'''\text{dc.}$$

Bedient man sich der bei Decimalbrüchen üblichen Bezeichnungsweise, so kann man diese 4 Ausdrücke ganz kurz so neben einander stellen:

$$a.q^0+b.q'+c.q''+d.q'''\,\text{dc.} = a,obocod.q^0$$
$$= aob,ocod.q'$$
$$= aoboc,od.q''$$
$$= aobocod.q'''\,\text{dc.}$$

c) $a.q^0+b.q'+c.q''+d.q'''$ ddc. sollen in Decimalmaaß verwandelt werden.

$$a.q^0+b.q'+c.q''+d.q'''\,\text{ddc.}$$
$$= \left(a+\frac{b}{144}+\frac{c}{20736}+\frac{d}{2985984}\right)q^0\,\text{ddc.}$$
$$= \left(a.100+\frac{b.100}{144}+\frac{c.100}{20736}+\frac{d.100}{2985984}\right)q'\,\text{dc.}$$
$$= \left(a.10000+\frac{b.10000}{144}+\frac{c.10000}{20736}+\frac{d.10000}{2985984}\right)q''\,\text{dc.}$$
$$= \left(a.1000000+\frac{b.1000000}{144}+\frac{c.1000000}{20736}+\frac{d.1000000}{2985984}\right)q'''\,\text{dc.}$$

d) $a.q^0+b.q'+c.q''+d.q'''$ dc. sollen in Duodecimalmaaß verwandelt werden.

$$a.q^0+b.q'+c.q''+d.q'''\,\text{dc.}$$
$$= \left(a+\frac{b}{100}+\frac{c}{10000}+\frac{d}{1000000}\right)q^0\,\text{dc.}$$
$$= \left(a.144+\frac{b.144}{100}+\frac{c.144}{10000}+\frac{d.144}{1000000}\right)q'\,\text{ddc.}$$

Digitized by Google

$$= \left(a \,.\, 20736 + \frac{b \,.\, 20736}{100} + \frac{c \,.\, 20736}{10000} + \frac{d \,.\, 20736}{1000000}\right) q'' \text{ ddc.}$$

$$= \left(a \,.\, 2985984 + \frac{b.2985984}{100} + \frac{c.2985984}{10000} + \frac{d.2985984}{1000000}\right) I''' \text{ ddc.}$$

Bedient man sich der bei Decimalbrüchen üblichen Bezeichnungsweise, so kann man diese 4 Ausdrücke ganz kurz neben einander stellen:

$$a.q^0 + b.q' + c.q'' + d.q''' = \left(a + \frac{b}{100} + \frac{c}{10000} + \frac{d}{1000000}\right) q^0 \text{ dc.}$$

$$= 144 \,.\, a,obocod \,.\, q' \text{ ddc.}$$

$$= 20736 \,.\, a,obocod \,.\, q'' \text{ ddc.}$$

$$= 2985984 \,.\, a,obocod \,.\, q''' \text{ ddc.}$$

§. 17. Figurirte Zahlen.

Figurirte Zahlen sind solche, deren Einheiten sich in regelmäßigen Figuren darstellen lassen.

1 bis 4. Fig. 73 stellt anschaulich die 4 ersten dreieckigen oder Triangularzahlen dar. Jeder Punkt muß von jedem, ihm zur Seite stehenden so weit entfernt sein, als der erste vom zweiten; deßhalb steigt die Anzahl der Punkte von 3 auf 6, von 6 auf 10, von 10 auf 15 u. s. w.

Auf diese Weise findet man, daß die Zahlenreihe 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 u. s. w. die Triangular- oder dreieckigen Zahlen darstellt.

5. u. 6. Nimmt man die Unterschiede je zweier auf einander folgenden Zahlen der eben aufgestellten Reihe, so erhält man die Zahlen

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

d. h., die natürliche Reihe der ganzen Zahlen. Da wir diese Reihe aus jener durch Subtraction abgeleitet haben, so werden wir jene aus dieser durch Addition wieder erzeugen. Man braucht nur in der natürlichen Reihe der ganzen Zahlen alle Zahlen von Anfang an zu addiren; so entstehen die dreieckigen Zahlen.

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

7. Ein solches Quadrat hat, wie jedes Quadrat, 4 Winkelpunkte.

8. Um den ersten Quadratzoll müssen 3 eben so große Quadratzoll gelegt werden, wenn das Ganze, aus 4 Quadratzollen bestehend, wieder ein Quadrat bilden soll. Diese Zeichnung (Fig. 74) enthält nun 9 Winkelpunkte.

9. Durch Anschiebung von 5 andern, gleich großen Quadratzoll kann man das nächst größere Quadrat erzeugen; dieses enthält 16 Winkelpunkte.

10. Setzt man diese Operation fort, so erhält man für die Bildung des nächstfolgenden Quadrats 25, und für das darauf folgende 36 Winkelpunkte. Die Zahlen, welche die Anzahl dieser, in Quadratform erscheinenden Punkte darstellen, bilden die Reihe der sogenannten viereckigen Zahlen. Man nennt sie auch aus vorliegendem Grunde Quadratzahlen. Sie sind:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 u. s. w.

11. Aus der natürlichen Reihe der ungeraden Zahlen kann man sehr einfach die Quadratzahlen darstellen. Man braucht nur alle Zahlen dieser Reihe von 1 an zu addiren. Die natürliche Reihe der ungeraden Zahlen ist

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 u. s. w.

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 \text{ u. s. w.}$$

Und wenn man umgekehrt die Unterschiede je zweier auf einander folgenden Quadratzahlen nimmt, so erhält man die Reihe der ungeraden Zahlen.

12. Fig. 75 stellt die fünfeckigen, Fig. 76 die sechseckigen Zahlen dar. Wie jene und diese durch Zusammenstellungen im Raume entstehen, zeigen die Figuren anschaulich. Arithmetisch kann man die fünfeckigen Zahlen durch Summirung der Zahlen in der Reihe

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19

auf folgende Weise darstellen:

$$1 = 1$$
$$1 + 4 = 5$$
$$1 + 4 + 7 = 12$$
$$1 + 4 + 7 + 10 = 22$$
$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$$
$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 51 \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

Die sechseckigen Zahlen entstehen auf ähnliche Weise durch die Zahlenreihe

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29.

$$1 = 1$$
$$1 + 5 = 6$$
$$1 + 5 + 9 = 15$$
$$1 + 5 + 9 + 13 = 28$$
$$1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45$$
$$1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 66 \text{ u. s. w.}$$

§. 18. Trigonometrische Grundanschauungen.

1 bis 6 sind für sich klar. Man nennt diese Linien, nämlich den Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante nebst dem Quersinus darum trigonometrische Linien, d. h., Linien, welche zur Meßkunst (und Berechnungskunst) der Dreiecke gehören, weil sie in demjenigen Theile der Mathematik, welcher die Berechnung der Dreiecke lehrt, ganz unentbehrlich sind. Ihre Betrachtung wird darum hier vorgenommen, weil sie zur Uebung des Anschauungsvermögens in räumlichen Verhältnissen eine sehr treffliche Gelegenheit bieten.

7. Da, wie früher gelehrt worden ist, jeder Winkel am Centrum des Kreises von dem Bogen, auf welchem er steht, gemessen wird, und beide gleich viel Grade enthalten, so kann man die trigonometrischen Linien sowohl auf die Bogen, wie auf die Winkel beziehen; denn ihre Länge wird eben so gut durch die Länge der Bogen, als durch die Größe der Winkel bestimmt. Soll man daher angeben, was unter einer trigonometrischen Linie zu verstehen sei, so kann dieß sowohl in Beziehung auf den Winkel als in Beziehung auf den Bogen geschehen. Festhalten muß man hierbei nur immer, daß die trigonometrischen Linien hier *immer* durch denselben Punkt, welcher als *Anfangspunkt aller* Bogen angesehen wird, gezogen werden. Die Definitionen der trigonometrischen Linien lauten nun in Beziehung auf Winkel und Bogen, wie die Anschauung lehrt, also:

1. a) Der Sinus eines Winkels ist die von einem Schenkel des Winkels auf den andern gefällte Perpendikulärlinie.

   b) Der Sinus eines Bogens ist das, von dem Endpunkte desselben auf den, durch den Anfangspunkt des Bogens gezogenen, Halbmesser gefällte Perpendikel.

Digitized by Google

2. a) Der Cosinus eines Winkels ist derjenige Schenkel desselben, auf welchem der Sinus senkrecht steht, vom Scheitelpunkte bis zum Durchschnittspunkte mit dem Sinus.

   b) Der Cosinus eines Bogens ist der Sinus des diesen Bogen zu 90° ergänzenden Bogens, oder die Entfernung des Fußpunktes des Sinus vom Mittelpunkte des Kreises.

3. a) Die Tangente eines Winkels ist die, von den Schenkeln des Winkels begränzte, mit dem Sinus parallel gezogene Linie, deren Fußpunkt (a) so weit vom Scheitelpunkte des Winkels entfernt ist, als die Spitze des Sinus (b) vom Scheitelpunkte des Winkels entfernt ist.

   b) Die Tangente eines Bogens ist die, durch den einen Endpunkt desselben an ihn gezogene Tangente, verlängert bis zum Durchschnitt mit dem durch den anderen Endpunkt gezogenen und verlängerten Halbmesser.

4. a) Die Cotangente eines Winkels ist die Tangente des ihn zu 90° ergänzenden Winkels, oder seines Complement-Winkels.

   b) Die Cotangente eines Bogens ist die Tangente des ihn zu 90° ergänzenden Bogens, oder seines Complementbogens.

5. a) Die Secante eines Winkels ist derjenige Schenkel desselben, welcher vom Scheitelpunkt und von der ihn schief treffenden Tangente begränzt wird.

   b) Die Secante eines Bogens ist der, durch den Endpunkt des Bogens gezogene, bis zum Durchschnittspunkte mit der Tangente verlängerte Radius.

6. a) Die Cosecante eines Winkels ist die Secante seines Complementwinkels.

   b) Die Cosecante eines Bogens ist die Secante seines Complementbogens.

7. a) Der Quersinus eines Winkels ist derjenige Theil des einen Schenkels des Winkels, welcher die Entfernung des Sinus von der Tangente bestimmt.

   b) Der Quersinus eines Bogens ist die Entfernung des Fußpunktes des Sinus vom Anfangspunkte des Bogens.

8. Die unter dieser Nummer aufgestellte Forderung enthält und leitet das Wichtigste der Betrachtung dieser trigonometrischen Linien ein. Sie erweitert die Anschauung räumlich ausgedehnter, stetiger Größen ungemein. Demjenigen wird die Aus-

Digitized by Google

führung ganz leicht werden, welcher festhält, daß die trigonometrischen Linien immer durch denselben Anfangspunkt a gezogen werden sollen. Einem einigermaßen geübten Anschauungsvermögen wird es auch sogleich (intuitiv) gewiß, zu welchen Winkeln und Bogen gleiche trigonometrische Linien gehören. Gerade diese Bildung des Anschauungsvermögens wird hier erzielt, da, wie der Kenner weiß, in der Regel die Wahrheiten räumlich ausgedehnter Größen, die Auflösungen geometrischer Aufgaben z. B., nicht durch Begriffe (auf discursivem Wege), sondern durch reine Anschauung (auf intuitive Weise) gefunden werden. Späterhin tritt der logische Verstand hinzu, um das in einem lückenlosen Zusammenhange klar Erschaute in Theile aufzulösen, dieselben von einander abzuleiten, einander unterzuordnen, und den Gegenstand zum Object der Mittheilung durch Wortsprache zu machen. Die Raumlehre zeigt am deutlichsten, daß wir zum Denken nicht nothwendig der Worte bedürfen; der Geometer erfindet seine Wahrheiten ohne Worte.

Bestimmen wir nun zuerst die Größe des Sinus für spitze, rechte, stumpfe, flache und erhabene Winkel, oder für Bogen, welche $< 1\ Q$ (Q = Quadrat), $= 1\ Q$, $> Q$ aber $< 2\ Q$, $= 2\ Q$, $> 2\ Q$ aber $< 3\ Q$, $= 3\ Q$, $> 3\ Q$ aber $< 4\ Q$, $= 4\ Q$ sind (Fig. 77). a ist der beständige Anfangspunkt der Winkel und Bogen; ad sei der erste, dk der zweite, kt der dritte, ta der erste Quadrant; der übrige Inhalt der Figur ist für sich klar.

Ist der Winkel oder Bogen $= 0^0$, d. h., ist noch kein Winkel vorhanden, so fehlt auch noch der Sinus. Also sinus von $0^o = 0$.

Für den Bogen ab (∟ aob) ist bn der Sinus;
= = = ac (∟ aoc) = cp = =

cp ist > bn. Mit den Bogen und Winkeln wachsen also im ersten Quadranten die Sinus. Daraus folgt aber nicht, daß im ersten Quadranten zum doppelten Bogen ein doppelter Sinus gehöre.

Für den Bogen ad (∟ aod = R) ist do der Sinus = r (Radius);
= = = ae (∟ aoe) = ev = =
= = = al (∟ aol) = ls = =
= = = adk (∟ aok = 2R) = o = =
= = = adq (∟ aoq > 2R) = qr = =
= = = adf (∟ aof > 2R) = fx = =
= = = adt (∟ aot = 3R) = to = =
= = = adu (∟ aou > 3R) = uw = =
= = = adi (∟ aoi > 3R) = 12 = =
= = = adta (∟ aoa = 4R) = 0 = =

Digitized by Google

Sprechen wir die darin enthaltenen anschaulichen Wahrheiten in Worten aus, so haben wir folgende Sätze:

1. Im ersten Quadranten wachsen die Sinus mit den Bogen (oder Winkeln, was sich von selbst versteht); wird der Bogen = Q, so ist der Sinus = dem Radius des Kreises; der Sinus hat nun seine möglich-größte Länge erreicht. Das Maximum des Sinus ist der Radius, und ein solcher Sinus gehört zu einem Bogen oder Winkel von 90°.

2. Im zweiten Quadranten nehmen die Sinus, indem die Bogen wachsen, ab; der stumpfe Winkel hat einen kleineren Sinus als der rechte Winkel, und derjenige Winkel, welcher stumpfer ist, als ein anderer, hat den kleineren Sinus. Die stetige Abnahme dieser Sinus im zweiten Quadranten geht fort, bis der Bogen = 2 Q geworden ist; nun ist die Größe des Sinus ganz verschwunden; der sinus von 2 Q oder 2 R ist = 0.

3. Im dritten Quadranten wachsen die Sinus wieder mit den Bogen; je größer der Bogen im dritten Quadranten, desto größer sein Sinus. Dieses Wachsthum findet seine Gränze, wenn der Bogen = 3 Q geworden ist; nun ist der Sinus wieder = dem Radius = r.

4. Im vierten Quadranten nehmen die Sinus mit dem Wachsthum der Bogen wieder ab; zu dem größeren Bogen gehört der kleinere Sinus. Diese Abnahme findet ihre Gränze, wenn der Bogen eine Größe von 4 Q erreicht hat. Nun ist der Sinus wieder = 0; sinus 4 Q oder 4 R = 0.

9. Alle möglichen Werthe der Sinus liegen demnach zwischen der Nullgröße und der Größe des Radius, zwischen 0 und r. Jenes ist das Minimum der Sinus, dieses ihr Maximum; beide werden nicht überschritten, d. h., es giebt keinen Sinus, welcher kleiner als 0, und keinen, welcher größer als der Radius des Kreises wäre, von dessen Bogen die Rede ist.

Setzt man den Radius dieses Kreises = 1, so kann der Sinus höchstens den Werth von 1 erreichen; in allen andern Fällen ist er < 1, und seine Größe schwebt alsdann, wenn er eine wirkliche Größe hat, zwischen 0 und 1, d. h., seine Größe wird nur durch einen ächten Bruch ausgedrückt.

10. Wie unter Nummer 8 die Angaben für die Größe der Sinus in den verschiedenen Quadranten gemacht worden ist, so soll dasselbe nun auch für die übrigen trigonometrischen Linien geschehen. Die Sache hat keine Schwierigkeit; wir dürfen uns nur an Figur 77 halten.

Digitized by Google

1. Für den Cosinus.

Für den Bogen 0° ist der Cosinus = ao = r
" " " ab " " " = no
" " " ac " " " = po
" " " ad " " " = o
" " " ade " " " = vo
" " " adl " " " = so
" " " adk " " " = ko
" " " adq " " " = ro
" " " adf " " " = xo
" " " adt " " " = o
" " " adu " " " = wo
" " " adi " " " = 2o
" " " ada " " " = ao.

Kurz in Worten ausgedrückt, heißen die darin liegenden Hauptsätze:

Die größten Cosinus gehören zu solchen Bogen, welche 0°, 180° und 360° groß sind; der größte Cosinus ist = r. Die kleinsten Cosinus gehören zu solchen Bogen, welche 90° und 270° groß sind; die kleinsten Cosinus sind = 0. Im ersten Quadranten nehmen die Cosinus stetig ab bis 0, im zweiten wieder stetig zu bis r, im dritten wieder stetig ab bis 0, im vierten wieder stetig zu bis r.

2. Für die Tangenten.

Für den Bogen 0° ist die Tangente 0
" " " ab " " " = ag
" " " ac " " " = ai
" " " ad " " " = ∞
" " " ae " " " = ay
" " " al " " " = az
" " " adk " " " = 0
" " " adq " " " = ag
" " " adf " " " = ai
" " " adt " " " = ∞
" " " adu " " " = ay
" " " adi " " " = az
" " " ada " " " = 0.

Die dadurch ausgesprochenen Wahrheiten sind für sich klar. Nur bemerkt soll noch werden, was unter den Ausdrücken: »Die Tangenten der Bogen ad und adt, von 1 und 3 Q, seien = ∞, eigentlich zu verstehen ist. Bekanntlich muß der nach dem Endpunkte des Bogens gezogene Radius verlängert werden, bis er die durch den Anfangspunkt des Bo-

Digitized by Google

gens gezogene Tangente trifft, um dadurch die Länge derselben für den gegebenen Bogen zu bestimmen. Geschieht dieß für die Bogen ad und adt, so werden od und ot verlängert, bis sie die durch a gezogene Tangente ai oder ay treffen. Allein ad und at laufen mit ai und ay parallel; es findet unter ihnen also gar kein Durchschneiden statt. Will man aber dennoch von Durchschneiden sprechen, so kann man sagen: sie durchschneiden oder treffen einander in unendlich großer Entfernung, d. h., in einer solchen, welche größer ist als jede angebbare Länge, oder welche größer ist als jede endliche Linie. Folglich ist die Länge der Tangente für Bogen, welche = einem, und für Bogen, welche = dreien Quadranten sind, unendlich groß, welches durch das Zeichen (∞) ausgedrückt wird.

3. Für die übrigen trigonometrischen Linien.

Größe der Bogen		Secante	Cotangente	Cosecante	Quersinus
1.	0°	oa	∞	∞	o
2.	ab	og	dh	oh	na
3.	ac	oi	d3	o3	pa
4.	ad	∞	o	od	oa
5.	ae	oy	d4	o4	va
6.	al	oz	d5	o5	sa
7.	adk	oa	∞	∞	ka
8.	adq	og	dh	oh	ra
9.	adf	oi	d3	o3	xa
10.	adt	∞	o	od	oa
11.	adu	oy	d4	o4	wa
12.	adi	oz	d5	o5	2a
13.	ada	oa	∞	∞	0

Die in diesem Täflein enthaltenen Sätze sind so leicht in Worte überzutragen, daß dieses hier für überflüssig gehalten wird.

11. Die unter dieser Nummer aufgeführte Tafel auszufüllen, hat

nunmehr nicht die mindeste Schwierigkeit. In derselben sind Winkel gegeben, da bisher von Bogen die Rede war. Wir wissen aber, daß beide für einander gesetzt werden können. Wir stellen das Verlangte zusammengedrängt in folgendem Täflein auf:

Größe der trigonometr. Linien für den Radius = 1	Für 0°	1 R	2 R	3 R	4 R
Sinus . . .	0	1	0	1	0
Sinus versus	0	1	2	1	0
Tangente .	0	∞	0	∞	0
Secante . .	1	∞	1	∞	1
Cosinus . .	1	0	1	0	1
Cotangente .	∞	0	∞	0	∞
Cosecante .	∞	1	∞	1	

12. Die Größe des Radius des Kreises überschreiten, selbst in ihrem größten Werthe, nie: der Sinus und der Cosinus; der Quersinus überschreitet nie die Größe des Durchmessers; eine unendliche (unendlich-große) Größe erreichen: die Tangente, die Secante, die Cotangente und Cosecante.

13. Nun wollen wir Wachsthum und Abnahme des Sinus und Cosinus, der Tangente und Cotangente, und endlich der Secante und Cosecante für denselben Bogen oder Winkel mit einander vergleichen.

1. Der Sinus und Cosinus.

Im ersten Quadranten ist mit dem Wachsthum des Bogens Wachsthum des Sinus und Abnahme des Cosinus verbunden; im zweiten Quadranten nimmt der Sinus ab, der Cosinus zu u. s. w. Ueberhaupt ist in allen Quadranten Wachsthum des Sinus mit Abnahme des Cosinus verbunden, und umgekehrt.

Ist der Sinus = 0, so ist der Cosinus desselben W. = 1 (für r=1);

" " = 1 " " " " = 0

" " $= \begin{cases} > 0 \\ < 1 \end{cases}$ " " " " $= \begin{cases} < 1 \\ > 0 \end{cases}$.

2. Die Tangente und Cotangente.

Im ersten Quadranten ist mit dem Wachsthum des Winkels auch Wachsthum der Tangente, aber Abnahme der Cotangente verbunden. Während im zweiten Quadranten die Tangente abnimmt, wächst die Cotangente u. s. w. Kurz: mit dem Wachsthum der Tangente ist Abnahme der Cotangente verbunden, und umgekehrt.

Ist die Tangente $= 0$, so ist die Cotangente $= \infty$

" " " $= \infty$ " " " $= 0$

" " " $\left\{\begin{matrix} > 0 \\ < \infty \end{matrix}\right\}$ " " " $\left\{\begin{matrix} < \infty \\ > 0 \end{matrix}\right\}$.

3. Die Secante und Cosecante.

Im ersten Quadranten ist mit dem Wachsthum des Bogens auch ein Wachsthum der Secante, aber Abnahme der Cosecante verbunden. Im Allgemeinen gilt der Satz, daß mit dem Wachsthum der Secante Abnahme der Cosecante und mit der Abnahme der Secante Wachsthum der Cosecante verbunden ist, und umgekehrt.

Ist die Secante $= 1$, so ist die Cosecante $= \infty$

" " " $= \infty$ " " " " $= 1$

" " " $\left\{\begin{matrix} > 1 \\ < \infty \end{matrix}\right\}$ " " " $\left\{\begin{matrix} < \infty \\ > 1 \end{matrix}\right\}$.

Ueber diese drei Sätze werden wir uns gar nicht wundern, wenn wir bedenken, daß Winkel und dazu gehörige Complementwinkel zusammen 90° betragen. Was die Sinus, Tangenten und Secanten für ihre Winkel sind, sind die Cosinus, Cotangenten und Cosecanten für die Complementwinkel. Wächst der Hauptwinkel, so nimmt der Complementwinkel ab, und umgekehrt; nimmt der Hauptwinkel ab, so wächst der Complementwinkel. Daher muß mit dem Wachsthum und der Abnahme der trigonometrischen Linien für den Hauptwinkel Abnahme und Wachsthum der trigonometrischen Linien für den Complementwinkel verbunden sein.

Die Nummer 13 verlangte aber eigentlich nicht ganz das Vorstehende, sondern außer der Vergleichung des Sinus mit dem Cosinus die Vergleichung der Tangente mit der Secante und der Cotangente mit der Cosecante. Dieses ist also noch zu thun.

Tangente und Secante desselben Winkels oder Bogens gehören zu einem rechtwinkligen $\triangle$, von welchem jene Linie eine Cathete, diese die Hypothenuse ist. Begreiflicher Weise

Digitized by Google

muß, wenn bei gleichbleibender zweiter Cathete die andere wächst, auch die Hypothenuse wachsen, und umgekehrt, und dieselbe muß abnehmen, wenn die Cathete abnimmt, und umgekehrt.

Wird die Tangente = 0, so ist die Secante desselben ⌞ = 1;
" " " = ∞; " " " " = ∞;
" " " $\left\{\begin{matrix}>0\\<\infty\end{matrix}\right\}$ " " " $\left\{\begin{matrix}>1\\<\infty\end{matrix}\right\}$.

In gleichem Verhältniß zu einander stehen Cotangente und Cosecante. Mit der Cotangente eines Winkels wächst auch die Cosecante desselben Winkels, und umgekehrt, und mit der Abnahme der Cotangente ist auch Abnahme der Cosecante verbunden, und umgekehrt.

Ist die Cotangente = 0, so ist die Cosecante desselben ⌞ = 1;
" " " = ∞; " " " " = ∞;
" " " $\left\{\begin{matrix}>0\\<\infty\end{matrix}\right\}$ " " " $\left\{\begin{matrix}>1\\<\infty\end{matrix}\right\}$.

14 u. 15. Da die trigon. Linien, von irgend einem Punkte des Kreises, z. B. dem bisherigen Anfangspunkte aus, gerechnet, und von da durch den ganzen Kreis stetig durchgeführt bis zum Ausgangspunkt zurück, wachsen und abnehmen, und vielleicht wieder wachsen und wieder abnehmen bis zur anfänglichen Größe zurück, und zwar alles dieses stetig, ununterbrochen und lückenlos; so müssen sich im Kreise Stellen finden, welchen gleiche trigon. Linien angehören. Wir werden diese Stellen für die verschiedenen trigon. Linien leicht bestimmen können, wenn wir uns nur von der Anschauung leiten lassen.

Wenn der Bogen ab = dem Bogen lk = qk = za, so werden auch die Entfernungen der Punkte b, l, q und z von dem Durchmesser ak einander gleich sein; d. h., in diesem Falle gehören zu den Bogen ab, abl, abq und abz gleiche Sinus. Vergleichen wir die 3 letzten Bogen mit dem ersten ab, so finden wir, daß

ab + al = lk + al = 180°;
abq — ab = abq — qk = 180°;
abz + ab = abz + za = 360°.

Wenn also die Summe zweier Bogen entweder = 180° oder 360°, und wenn der Unterschied zweier Bogen = 180°

Digitized by Google

ist, so gehören zu diesen Bogen gleich große Sinus. Da die Bogen die auf ihnen stehenden Winkel am Mittelpunkte messen, so können wir diese Sätze auch so ausdrücken: Wenn 2 Winkel einander zu 2 oder 4 R ergänzen, oder wenn ihr Unterschied gleich 2 R ist, so haben sie gleiche Sinus.

Daß unter denselben Bedingungen auch die Cosinus, Tangenten, Secanten, Cotangenten und Cosecanten einander gleich seien, lehrt unmittelbar die Anschauung oder eine leichte Betrachtung der Dreiecke, welchen diese Linien angehören. — Nur von den Quersinus gelten diese Sätze nicht ganz. Ist der Bogen ab = az, so daß Bogen ab + Bogen abkz = 360°, so haben beide einerlei Quersinus. Und wenn der Bogen al um so viel kleiner als 180°, um wie viel der Bogen alq größer ist als 180° (oder wenn kl = kq), d. h., wenn die beiden Bogen al und alq zusammen 2mal 180°, d. h. 360° betragen, so haben sie einerlei Quersinus. Für den Quersinus heißt daher der Satz: Wenn 2 Bogen einander zu 360°, oder wenn 2 Winkel einander zu 4 R ergänzen, so haben sie *einerlei*, folglich gleiche Quersinus.

16. Die Wahrheit dieses Satzes ist unmittelbar vorher nachgewiesen.

17. Wenn 2 gerade Linien gerade entgegengesetzte Lage haben, die eine z. B. von einem Punkte vorwärts, die andere in derselben Richtung liegt, aber rückwärts gerichtet ist, so nennt man, wenn die Lage der einen Linie die positive heißt, die Lage der andern die negative, d. h. nichts anders, als die der ersten entgegengesetzte. *Welcher* Linie Lage man positiv nennen will, ist gleichgültig. Nur ist, sobald dieß geschehen ist, die Benennung der Lage der andern nicht mehr willkührlich, sondern durch die Benennung der ersteren bestimmt, da ihre Lage der Lage der ersten entgegengesetzt ist.

Wenden wir dieß auf die Lage der trigon. Linien an, z. B. zuerst auf die Sinus in den 4 Quadranten; so finden wir auch entgegengesetzte Lagen. Die Sinus des ersten und zweiten Quadranten haben in unserer Figur die Lage von oben nach unten; dagegen werden die Sinus in dem dritten und vierten Quadranten in entgegengesetzter Richtung, d. h., von unten nach oben, von der Peripherie auf den Durchmesser gefällt. Die Lage der Sinus in den beiden ersten Quadranten ist also immer dieselbe, und die Lage der Sinus in dem dritten und vierten Quadranten ist unter sich auch dieselbe; aber die Sinus in den beiden ersten Quadranten haben die entgegengesetzte Lage von den Sinus in dem dritten und vierten Quadranten. Betrachten wir daher die Lage der Sinus im ersten Quadranten als positiv, so ist ihre Lage auch im zweiten

Digitized by Google

positiv, im dritten und vierten aber negativ. Nennt man letztere Lage die positive, so ist erstere die negative.

18. Nehmen wir die Lage der trigon. Linien im ersten Quadranten als positiv an, so läßt sich die Lage dieser Linien in den übrigen Quadranten leicht bestimmen. Für die Sinus ist es schon geschehen.

Die Cosinus sind im ersten Q. von der rechten zur linken Hand (von n nach o zu) gerichtet, oder können so gerichtet angesehen werden; ebenso sind sie gerichtet im vierten Q.; im zweiten und dritten aber sind sie von der linken zur rechten Hand, d. h., entgegengesetzt, gerichtet. Unter obiger Annahme sind also die Cosinus im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

Die Lage der Tangenten geht im ersten Q. von unten nach oben, von a aufwärts nach i; im zweiten Q. haben sie die entgegengesetzte Lage, von a abwärts nach y; im dritten Q. liegen sie wie im ersten; im vierten wie im zweiten. Die Lage der Tangenten ist also im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Dasselbe gilt von den Secanten, von den Cotangenten und Cosecanten.

Die Quersinus sind stets von a aus links gerichtet; sie haben also stets einerlei, niemals entgegengesetzte Lage.

19. Der Uebersicht wegen ist es gut, dergleichen einander ähnliche und entgegengesetzte Beziehungen tabellarisch aufzustellen. Dieß giebt unter den Bestimmungen der 19ten Nummer folgendes Täflein:

Trigon. Linien	Lage derselben für einen Winkel von			
	$a^0 < R$	$(a+R)^0$	$(a+2R)^0$	$(a+3R)^0$
Sinus . . .	+	+	−	−
Sinus versus	±	±	±	±
Tangente .	+	−	+	−
Secante . .	+	−	+	−
Cosinus . .	+	−	−	+
Cotangente	+	−	+	−
Cosecante .	+	−	+	−

Die beiden Zeichen für den Quersinus, in jedem Feldchen des Täfleins, bedeuten, daß seine Lage entweder stets positiv,

Digitized by Google

oder stets negativ ist. Allein beides findet eigentlich nicht statt, weil man von Positivem und Negativem nur bei entgegengesetzten Lagen und Größen, welche bei'm Quersinus aber nicht vorkommen, sprechen kann.

Das Täflein zeigt, daß die Tangenten, Secanten, Cotangenten und Cosecanten in denselben Quadranten dieselben Zeichen haben; im ersten und dritten Quadranten haben sie alle das Zeichen (+), im zweiten und vierten das Zeichen (−).

20. Denken wir uns einen senkrecht in die Höhe geworfenen Stein, so steigt er immer langsamer und langsamer; zuletzt steigt er nicht mehr, sondern er fällt. Er hat nun eine Richtung, welche der anfänglichen gerade entgegengesetzt ist. Die Abnahme seiner Geschwindigkeit beim Steigen war stetig, d. h., in jedem folgenden Augenblicke bewegte sich der Stein langsamer als im vorhergehenden; dieß ging so fort, bis er sogar eine entgegengesetzte Richtung annahm. Wir können dieß nicht begreifen, ohne anzunehmen, daß er einen Augenblick, sei dieser auch noch so klein, still gestanden habe, daß seine Bewegung ein Augenblickchen 0 gewesen sei. Und zwar muß dieß statt gefunden haben zwischen dem Augenblicke, in welchem er noch (aufwärts) stieg, und dem Augenblicke, in welchem er schon (abwärts) fiel, d. h., in dem Uebergangs-Augenblick zwischen dem Steigen und Fallen. Der Uebergang von der aufwärts gehenden oder positiven Richtung in die abwärts gehende oder negative fand durch Null statt. Die Null bezeichnet also den Durchgangspunkt einer positiven, stetig abnehmenden Bewegung in die negative. — Dieses Beispiel veranschauliche uns die allgemeine Wahrheit, daß der Uebergang einer stetig, nicht sprungweise abnehmenden Größe von dem positiven Werthe zu dem negativen nothwendig durch Null geschehen muß. Unmittelbar vor dem Momente, in welchem die Größe negativ wurde, ist ihr Werth nicht mehr positiv, sondern Null gewesen. Wer sich jetzt diesseit eines Flusses befindet und späterhin jenseit desselben gefunden wird, hat nothwendig über den Fluß setzen müssen, und in dem Augenblicke, als er auf demselben, genauer, in dessen Mitte, war, befand er sich weder diesseit, noch jenseit desselben. Er war in diesem Momente zwischen dem Diesseits und dem Jenseits, in dem Nullpunkte.

Wenden wir das Gesagte auf den, im zweiten Quadranten mit dem Wachsthum des Bogens stetig abnehmenden Sinus an, so muß ein Augenblick kommen, in welchem seine Größe = 0 ist, welcher Augenblick unmittelbar dem Momente vorhergehen muß, in welchem er anfängt, einen negativen Werth zu haben. Dieser Augenblick muß mit einem Punkte der Kreisperipherie zusammenfallen, und der Augenschein lehrt,

Digitized by Google

daß dieses derjenige Punkt ist, in welchem die Peripherie mit dem Durchmesser zusammenfällt; in unserer Figur der Punkt k; der Sinus dieses Punktes ist in k weder positiv, noch negativ; denn er ist = 0. Das Positive und Negative haben sich in diesem Punkte gewissermassen geeinigt, gegenseitig ausgeglichen; daher wird er auch wohl Indifferenzpunkt genannt. — Betrachten wir aus diesem Gesichtspunkte auch die Größen der Tangenten und übrigen trigon. Linien in den verschiedenen Quadranten, so finden wir eine neue, überraschende Wahrheit. Im ersten Quadranten wächst mit dem Bogen die Größe der Tangente. Wir sehen hier ihre Lage als positiv an. Auf einmal finden wir im zweiten Quadranten die Tangente in einer entgegengesetzten Lage, und wir nennen diese die negative Lage. Das Wachsthum der Tangente im ersten Quadranten, wie in allen, war stetig, d. h., alle möglichen Zwischenstufen durchlaufend; welches ist nun der Durchgangspunkt vom positiven zum negativen Werthe gewesen, oder welches war die Größe der Tangente in dem Momente, welcher dem Momente vorherging, in welchem sie den ersten negativen Werth hatte? Wir finden ihren Werth in diesem Momente, welchem der Punkt d entspricht, unendlich groß. Es giebt also noch einen zweiten Durchgangspunkt vom Positiven in's Negative bei stetig veränderlichen Größen, nämlich den Durchgangspunkt durch das Unendlich-Große. Wir finden daher die allgemeine Wahrheit: Wenn eine stetig abnehmende positive Größe endlich einen negativen Werth erhält, so hat sie im Uebergang vom Positiven zum Negativen einen Werth = 0 gehabt; und wenn eine stetig zunehmende Größe einen negativen Werth erhält, so hat sie im Uebergang vom Positiven zum Negativen einen unendlich-großen Werth gehabt.

21. Im Allgemeinen geschieht also der Uebergang aus dem Positiven in's Negative, und umgekehrt, durch die Null und das Unendlich-Große (0 und ∞).

22. Unter obiger Voraussetzung, daß die trigon. Linien in dem ersten Quadranten als positiv betrachtet werden sollen, ist also der Sinus eines rechten Winkels = dem Halbmesser, positiv genommen, = + r, und folglich der Sinus eines Winkels, welcher = 3 R ist, = dem Halbmesser, negativ genommen, = — r.

Es wird nicht unpassend sein, die Werthe der trig. Linien in den verschiedenen Quadranten, absolut genommen, wie es früher geschehen ist, und relativ genommen, d. h., in ihrem gegenseitigen Werthe nach Verhältniß ihrer Lage, anzugeben. Wir stellen diese Werthe darum in folgender Tabelle zusammen, wobei die Größe des Halbmessers des Kreises, wie früher, = 1 angenommen wird. a bedeute einen Winkel, welcher < R ist.

Digitized by Google

Trig. Linien	Werthe derselben im Verhältniß zum Halbmesser, für Winkel von a°	90°	(a+90)°	180°	(a+180)°	270°	(a+270)°	360°od.0°
Sinus . .	$\frac{(\wedge 0)}{(\vee 1)}$ +	+ 1	$\frac{(\vee 1)}{(\wedge 0)}$ +	+1 0	$\frac{(\wedge 0)}{(\vee 1)}$ −	− 1	$\frac{(\vee 1)}{(\wedge 0)}$ −	0 +1
Cosinus .	$\frac{(\wedge 0)}{(\vee 1)}$ +	+ 0	$\frac{(\wedge 0)}{(\vee 1)}$ −	− 1	$\frac{(\vee 1)}{(\wedge 0)}$ −	+ 0	$\frac{(\wedge 0)}{(\vee 1)}$ +	1 +1
Tangente	$\frac{(\vee)^1}{(\wedge)}$ +	+ ∞	$\frac{(\wedge)^1}{(\vee)}$ −	0 +1	$\frac{(\vee)^1}{(\wedge)}$ +	− ∞	$\frac{(\wedge)^1}{(\vee)}$ −	0 +1
Cotangente	$\frac{(\wedge)^1}{(\vee)}$ +	+ 0	$\frac{(\vee)^1}{(\wedge)}$ −	∞ +1	$\frac{(\wedge)^1}{(\vee)}$ +	+ 0	$\frac{(\vee)^1}{(\wedge)}$ −	∞ +1
Secante .	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ +	+ ∞	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ −	− 1 +1	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ +	+ ∞	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ −	1 +1
Cosecante	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ +	+ 1	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ −	∞ +1	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ +	+ 1	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee)}$ −	∞ +1
Quersinus	$\frac{(\wedge 0)}{(\vee 1)}$ +	+ 1	$\frac{(\wedge 1)}{(\vee 0)}$ +	+ 2	$\frac{(\vee 2)}{(\wedge 1)}$ +	+ 1	$\frac{(\vee 1)}{(\wedge 0)}$ +	0 +1

25. Ein Schiff läuft mit Ostwind aus dem Hafen von Brest mit der Bestimmung nach Mexico. Die ihm vorgeschriebene Richtung geht also von Ost nach West, und diese Richtung ist als seine positive zu betrachten. Es legt in 8 Tagen 1000 Seemeilen in der Richtung seiner Bestimmung zurück; es ist also nun 1000 Meilen vorwärts gekommen, oder es hat 1000 Meilen in positiver Richtung (+1000 Meilen) zurückgelegt. Darauf nähern widrige Winde das Schiff 100 Meilen Europa wieder; mit andern Worten: das Schiff hat nun 100 Meilen rückwärts, d. h. **negativ vorwärts** zurück-

Digitized by Google

gelegt. Anhaltend wehende widrige (West-) Winde nähern das Schiff fort und fort Europa, und es ist endlich genöthigt, in dem Hafen von Calais einzulaufen. Calais liegt aber 200 Seemeilen ostwärts von Brest. Die Mannschaft ist also in Beziehung auf Brest, wo das Schiff ausgelaufen ist, gar nicht vorwärts, sondern rückwärts, und zwar, vom Punkte des Auslaufens an, 200 Meilen zurück gekommen, mit anderen Worten: das Schiff hat überhaupt nun 200 Meilen negativ-vorwärts zurückgelegt. Es ist nun nicht nur nicht vorwärts, sondern rückwärts gelaufen, d. h., das Schiff ist weiter vom Ziel (Merico) entfernt, als Anfangs. Der zurückgelegte Weg von 200 Meilen nach Osten ist also reiner Verlust. Die Mannschaft ist übler daran, als wenn sie fortwährend in Brest vor Anker liegen geblieben wäre. In diesem Sinne sagt man, daß die 200 Meilen, ostwärts zurückgelegt, weniger seien als stillgestanden, oder daß (— 200) weniger sei als Nichts, daß (— 200) < 0, und zwar um 200 weniger als Nichts.

In Beziehung auf das Positive kann also das Negative kleiner als Null genannt werden, und der Ausdruck: »es giebt Größen, welche kleiner sind als nichts,« enthält in dem genannten Sinne keinen Widerspruch, sondern Wahrheit.

Nehmen wir die Sache so, sie anwendend auf das Wachsthum und die Abnahme der trigon. Linien, zunächst auf die Sinus, so finden wir, daß die Sinus, da sie im zweiten Quadranten stetig abnehmen, bis sie für 180° Null werden, auch im dritten Quadranten noch fort und fort stetig im Abnehmen beharren. Denn sie erhalten im dritten Quadranten eine negative Lage; sie werden also, in Beziehung auf den positiven Werth, kleiner als Null; sie nehmen also in dem oben angegebenen Sinne fort und fort ab. Am kleinsten wird in dieser Beziehung ihr Werth, wenn der Bogen 270° groß geworden ist. Nun ist der Sinus, absolut betrachtet, gleich dem Radius des Kreises; er hat also absolut das Maximum seiner Größe erreicht; relativ betrachtet, und zwar im Gegensatze gegen die Lage im ersten und zweiten Quadranten, welche als die positive betrachtet wird, ist seine Größe jetzt am weitesten unter Null, d. h., er hat jetzt das Minimum seiner Größe erreicht. Der möglich kleinste Sinus, in Bezug auf entgegengesetzte Lage, ist also der von 270°, welcher dem Halbmesser, negativ genommen, gleich ist; er ist $= -r$.

Von jetzt an, fortrückend im vierten Quadranten, nimmt seine Größe, absolut betrachtet, wieder ab. Aber das Abnehmen einer negativen Größe kann in Beziehung auf das Positive, als Wachsthum angesehen werden; daher sagt man in diesem Sinne, daß der Sinus im vierten Quadranten wieder wachse. Dieses Wachsthum geht fort, bis er für einen

Digitized by Google

Bogen von 360° Null wird, und nun, weiter rückend durch den ersten Quadranten, wächst er fort und fort, bis der Bogen = 90° geworden ist. Von da an nimmt er, absolut und relativ betrachtet, ab, durch den ganzen zweiten Quadranten durch. — Folgende Sätze werden nunmehr verständlich sein: Im ersten Quadranten wächst der Sinus; im zweiten nimmt er in jedem Sinne ab; im dritten nimmt er, für sich oder absolut betrachtet, wieder zu; relativ betrachtet aber, fort und fort ab; im vierten Quadranten nimmt er absolut betrachtet ab, relativ aber zu. — Wenden wir dieses noch ganz kurz auf die übrigen trigon. Linien an, so finden wir

1. daß der Cosinus von 0 bis 180° fort und fort ab- und von 180° bis 360° zunimmt;
2. daß die Tangente von 0 bis 90° von der Null- bis zur unendlichen Größe, und im zweiten Quadranten von 90 bis 180° fort und fort wächst; in obigem Sinne. Eine überraschende Erscheinung, welche scheinbar nachweist, daß eine Größe größer werden könne, als unendlich groß, d. h., größer als das, was als das Größte dieser Art angenommen worden ist. Und dieß wäre ein offenbarer Widerspruch. Wie läßt sich dieses auflösen? — Unsere Tabelle unter Nummer 22 enthält schon die Auflösung. Denn die Tangente von 90°, welche $= \infty$ ist, kann und muß, da sie den Uebergang bildet vom Positiven zum Negativen, eben so gut als positiv ∞, wie als negativ unendlich angesehen werden. In jener Bedeutung stellt sie das Maximum der Größe der Tangenten, in dieser Bedeutung das Minimum derselben auf. Da sie nun nicht kleiner werden kann als ein Minimum, so muß sie bei vorfallender Veränderung ihrer Größe, d. h., im zweiten Quadranten, wieder wachsen. So löst sich der Widerspruch. Wenn also gesagt wird, daß die Tangente im ersten Quadranten wachse, und im zweiten Quadranten auch fort und fort wachse, so wird die unendliche Größe derselben, für einen Bogen von 90°, das eine Mal als positiv, das andere Mal als negativ betrachtet. — Im dritten Quadranten wächst die Tangente; im zweiten nimmt sie, absolut betrachtet, an Größe ab, relativ aber wächst sie, bis ihr Werth mit dem 360sten Grade die Größe 0 erreicht. —

Es kann nun keine Schwierigkeit mehr haben, das Bisherige auf alle übrigen trigon. Linien anzuwenden; daher es nicht für nöthig gehalten wird, die Betrachtung derselben in dem angegebenen Sinne noch weiter fortzusetzen.

Digitized by Google

§. 19. Zerlegung und Verhältniß geometrischer Begriffe (logisch = mathematische Uebungen).

Der Inhalt dieses §. ist im Leitfaden selbst so ausführlich behandelt und der zu nehmende Weg so genau bezeichnet, daß ich fast nichts Wesentliches hinzuzufügen finde. Ueber den Werth solcher Zergliederungen bemerke ich noch dieses: Soll der Schüler zur Selbstverständigung über das, was er lernt, macht und kann, gelangen; soll der Unterricht das Resultat herbeiführen, daß er den Gegenstand bis zu den Elementen, aus welchen er besteht, zurückzuführen im Stande ist; bezweckt der Lehrer überhaupt durch den ganzen Unterricht, und vorzugsweise durch rationelle (d. h., aus dem Geiste selbst geschöpfte) Gegenstände Entwickelung des Geistes von innen heraus, durch Selbstthätigkeit des Schülers, durch Operationen und Uebungen, bei denen nicht nur das Produkt, sondern auch der producirende Geist betrachtet und dadurch die Natur des Geistes und sein Vermögen kennen gelernt werden soll: so darf der Lehrer solche Uebungen, als der 19te §. enthält, durchaus nicht umgehen, sondern er muß auf diese sogenannte abstracte Behandlungsweise Werth legen. Es giebt viele Schulen, in welchen die Schüler eine Menge von Beweisen und Auflösungen mit Geschwindigkeit zu machen verstehen; fängt man aber an, die gebrauchten Begriffe in Theile zu zerspalten, oder verlangt man die Nachweisung, welche Art von Thätigkeit des geistigen Vermögens in Anspruch genommen werde, mit einem Worte: fragt man nach der eigentlichen Selbstverständigung des Schülers über den vorliegenden Gegenstand, nachforschend, in wiefern er sich selbst durch den Lehrgegenstand klar geworden sei: so stößt man in den meisten Fällen auf Nieten. Und doch ist es unleugbar, daß es nirgends weniger als im mathematischen Unterricht auf die Masse der Kenntnisse ankommt; und es ist eine unwiderlegliche Wahrheit, daß hier vorzugsweise auf Klarheit der Gedanken, der einzelnen Sätze, der einzelnen Begriffe und Vorstellungen und auf Selbstverständigung über das Verfahren Werth gelegt werden muß. Ganz vorzüglich werden diese Zwecke durch logische Uebungen in mathematischen und andern Gegenständen erreicht, und deßhalb lege ich auf ihre Behandlung ein entscheidendes Gewicht. Die logischen Uebungen lehren uns die Formen der Thätigkeit des Verstandes kennen. Die logischen Uebungen an mathematischen Gegenständen haben wegen der Anschaulichkeit der mathematischen Objecte den höchsten Grad von Klarheit und Evidenz, und da die Mathematik uns mit den Gegenständen reiner Anschauung und deßhalb mit den Formen, denen unser Anschauungsvermögen unterworfen ist, bekannt macht; so klären uns die logischen Uebungen an mathematischen Gegenständen überhaupt

Digitized by Google

über die Formen und Gesetze der Vermögen der Anschauung und des Verstandes auf, und erleichtern dem Schüler dadurch die Einsicht in die wesentlichsten Formen und Thätigkeiten seines Erkenntnißvermögens. Ein so betriebener mathematischer Unterricht fördert daher im vorzüglichsten Grade die Selbsterkenntniß, und es wird uns klar, in welch naher Beziehung die Anforderung mathematischer Bildung, welche die Griechen an jeden Bildung Suchenden machten, mit ihrem Ideale menschlicher Bildung — der Selbsterkenntniß — stand. Es lohnt gar nicht der Mühe, in den Schulen auf Mathematik Werth zu legen, wenn sie den Schüler nicht zur Selbstverständigung führt. Derselbe soll nicht nur Sätze kennen lernen; er soll nicht nur, wie man zu sagen pflegt, etwas können, sondern er soll auch kennen: die Quelle der mathematischen Erkenntnisse, ihren Ursprung — die Elemente, aus welchen sie zusammengesetzt werden — die Art und Weise, wie man dabei verfährt, die Verfahrungsweise und Methode — die geistigen Vermögen, welche bei der Beschäftigung mit Mathematik zur Uebung und Thätigkeit gelangen, also auch die Art der Bildung, welche durch Mathematik erzielt, und was durch sie ganz und gar nicht erstrebt werden kann. Kurz, der Unterricht in der Mathematik soll vorzugsweise die Zwecke der Selbstbeobachtung und Selbstverständigung des Menschen über sich selbst erstreben. Ich bemerke ausdrücklich, daß dieses das Ideal des mathematischen Unterrichts ist. Ideale erreicht man zwar nirgends ganz; darum aber sind sie nicht unnütz, sondern zum Erstreben irgend eines höheren Gutes ganz unentbehrlich. Zumal der Lehrer muß sich diesem Ideale nähern. Darum suche er selbst durch Mathematik die Erreichung jener Zwecke; darum bearbeite er für sich und mit seinen Schülern, wie es für diese paßt, die mathematischen Gegenstände so, wie es §. 19 vorschreibt. Kann man auch keine einzige abstracte Wahrheit unmittelbar im Leben gebrauchen, so wird doch der Geist durch die Beschäftigung mit ihnen besonders geschickt, das Concrete mit Leichtigkeit und Gewandtheit zu behandeln. — Ueber Einzelnes in diesem §. will ich noch das Folgende beifügen.

1. Durch Absonderung der Merkmale von einem Gegenstande gelangt man zu einer Vorstellung, welche weniger Merkmale hat, also zu einer einfacheren Vorstellung. Setzt man diese Abstraction fort, so muß man zuletzt auf eine Vorstellung gelangen, welche nicht mehr in eine Mehrheit von Merkmalen zergliedert werden kann, welche selbst nur aus einem Merkmale besteht. Solche Vorstellungen nennt man einfache, wie z. B. die Vorstellungen »Linie«, »Gränze«, »Fläche«. Die Begriffe Linie und Fläche sind einfacher und darum allgemeiner, als »gerade Linie« und »ebene Fläche« oder »Ebene«, weil in dem Begriffe »gerade Linie« außer dem Merkmale der Linie auch noch die Vorstellung der »Geradheit«

Digitized by Google

liegt, und der Begriff »ebene Fläche« zusammengesetzt ist aus den Vorstellungen »Fläche« und »Geradheit«.

2. So wie der Chemiker das Wesen eines Naturgegenstandes nicht durch äußere Kennzeichen, sondern durch Zerlegung desselben in seine Urbestandtheile, welche nicht weiter zerlegbar sind und daher als einfache Elemente angesehen werden müssen, kennen lernt, so verschafft sich der Mensch überhaupt durch Zerlegung seiner zusammengesetzten Begriffe klare Einsicht in das Wesen derselben.

3. Dabei aber bleibt der Chemiker nicht stehen. Er zerlegt nicht nur die Naturkörper, sondern er setzt sie auch durch die Vereinigung der aufgefundenen Elemente wieder zusammen. Jenes geschieht auf dem Wege der Zergliederung (Analyse), dieses durch das Mittel der Verbindung (Synthese). Wenn er durch chemische Analysis den zusammengesetzten Körper in einfachere Stoffe und diese wieder in einfachere bis zu den einfachsten, deren Zerlegung die Kunst nicht mehr zu bewerkstelligen im Stande ist, zerlegt, so setzt er nun auf dem umgekehrten Wege durch chemische Synthesis, durch Verbindung, die einfacheren Stoffe zusammen, damit sie sich zu einem gleichartigen Ganzen vereinigen.

Gerade so verfährt der denkende Mensch mit seinen, aus Merkmalen zusammengesetzten Begriffen und Anschauungen. Er zergliedert sie fort und fort bis zu ganz einfachen, höchst allgemeinen Vorstellungen, durch deren Zusammensetzung er nachher das Zusammengesetztere, weniger allgemeine, Ganze wieder construirt. Dadurch erlangt er Einsicht und Durchsicht seiner Vorstellungen; dadurch wird er seines Gedankenstoffes Meister. Gegenstände der äußeren Anschauung können wir beschauen und anschauen; Gegenstände der innern Anschauung und des Verstandes aber können wir nicht nur anschauen, sondern durchschauen.

4. Zerlegen wir die Begriffe »reguläres Fünfeck«, »Kreis«, »rechtwinkliges Dreieck« und »Raute« in ihre Bestandtheile!

Reguläres Fünfeck = { Regelmäßigkeit = Gleichseitigkeit + Gleichwinkligkeit. ; Fünfseitige Ebene = { Fünfseitigkeit ; Begränztheit { Ebene.

Der Begriff »reguläres Fünfeck« enthält demnach die Merkmale: ebene Fläche, fünfseitig, gleichseitig, gleichwinklig, begränzt.

Kreis = { Ebene ; Begränztheit ; Gleicher Abstand der Punkte der Gränzlinie von einem Punkte in dem Kreise, also Mittelpunkt }.

Digitized by Google

Rechtwinkliges △ = { Rechtwinklig: 1 R u. 2 spitze ∟ / Dreiseitig / Fläche / Begränzt }.

Raute = { Schiefwinkligkeit / Gleichseitigkeit / Parallelogramm = { Vierseitigkeit / Parallelismus der Seitenpaare / Begränzte Ebene } }.

Die Zusammensetzung der einzelnen Merkmale, aus welchen die drei letzten Begriffe bestehen, erhellet von selbst.

Auch ist es einleuchtend, daß man durch diese logische Zergliederung zu allgemeineren Vorstellungen gelangt. Wir fanden z. B. unter den Merkmalen der Raute die Begriffe »Parallelogramm« und »begränzte Ebene«. Der Begriff »Parallelogramm« ist aber von allgemeinerem Inhalte und weiterem Umfange als der Begriff »Raute«, und der Begriff »begränzte Ebene« ist wieder von allgemeinerem Inhalte und weiterem Umfange als der Begriff »Parallelogramm«.

5. Von dem Begriffe »Deutscher« zum nächsten allgemeineren Begriffe, und so fort, aufsteigend, giebt folgende Begriffreihe: Deutscher — Europäer — Kaukasier (Mensch mit weißer Gesichtsfarbe) — Mensch — vernünftiges Wesen — Wesen.

6. Die vorstehenden Begriffe folgen, wenn der allgemeinere voran gestellt und der nächst allgemeinere an ihn angereiht wird, so auf einander:

Wesen — vernünftiges Wesen — Mensch — Kaukasier — Europäer — Deutscher — (und fortgesetzt) z. B. Preuße — Westphale — Münsterländer — Bewohner der Stadt Münster u. s. w.

Vom kleinsten Umfange unter diesen Begriffen ist der letztere u. s. w. Zugleich enthält er aber die meisten Merkmale; denn Alles, was vom Münsterländer gilt, gilt auch von ihm; denn er ist ein Münsterländer; alle Merkmale des Westphalen, Preußen, Deutschen, des Europäers, Kaukasiers, des Menschen, des vernünftigen Wesens und der Wesen überhaupt finden sich auch in ihm; denn er ist dieses Alles. Er hat also den größten Inhalt unter allen diesen Begriffen. Es wird uns klar, daß der Inhalt eines Begriffes um so kleiner ist, je größer sein Umfang ist, und daß der Inhalt um so größer wird, je mehr sein Umfang abnimmt. Umfang und Inhalt eines Begriffes wachsen und nehmen ab in umgekehrtem Verhältnisse. Mit der Abnahme jenes ist Wachsthum dieses verbunden, und umgekehrt. —

Digitized by Google

Die Begriffe »Rechteck«, »gerade Linie«, »Haus«, »Rechtschaffenheit« u. s. w. sind von größerem Inhalt und darum von kleinerem Umfange als die Begriffe »Viereck«, »Linie«, »Gebäude«, »Tugend«.

7. Der weitere Begriff hat einen größeren Umfang und einen kleineren Inhalt, als der engere. Siehe die vorstehenden Beispiele!

8. In der Begriffreihe: Ding — körperliches Ding — Mineral — edles Metall — Gold — peruanisches Gold — Gold vom Chimborazo — ist jeder folgende Begriff dem vorhergehenden untergeordnet, und jeder vorhergehende dem nachfolgenden übergeordnet.

9. Der, einem anderen Begriffe übergeordnete Begriff ist stets von allgemeinerem Umfange, als der ihm untergeordnete; aber von kleinerem Inhalte als dieser; der übergeordnete ist immer der weitere.

10. Nach Anleitung der mitgetheilten und ausgeführten Beispiele unter Nro. 9 springt das Verlangte in die Augen.

11. Genauer unterscheidet man eine Nebenordnung des Umfanges und des Inhaltes. Die unter Nro. 11 angeführten Beispiele zeigen Nebenordnungen des Umfanges. Ein anderes Beispiel dieser Art ist dieses:

Dreieck

gleichseitiges gleichschenkliges ungleichseitiges.

Unter der Nebenordnung des Inhaltes eines Begriffs versteht man die Nebeneinanderstellung der Merkmale, welche den Inhalt eines Begriffes ausmachen. In dem Inhalte des Begriffes »Mensch« z. B. finden sich die Merkmale »Vernünftigkeit« und »Wesen«. Diese sind daher in Betreff des Inhaltes des Begriffes Mensch einander nebengeordnet. Dem Inhalte nach einander nebengeordnet in dem Begriffe Figur sind: Fläche und Begränzung — in dem Begriffe Fixstern: Himmelskörper und selbstleuchtend — in dem Begriffe Planet: Himmelskörper, bewegt und dunkel.

12 u. 13. Die verschiedenen Fälle über die Lage zweier Kreise in derselben Ebene können wir durch folgende Uebersicht aufstellen:

Zwei Kreise liegen

außer einander ohne mit Berührung — zum Theil in (einander schneidend) — ganz in einander ohne mit Berührung

ganz in einander: concentrisch, nicht concentrisch.

14. Der quadratförmige Fußboden eines Zimmers hat eine Menge Eigenschaften, welche das geometrische Quadrat an sich nicht hat. Jener hat eine Farbe, ist von Holz, oder Stein, oder Lehm u. s. w. Alle diese physischen Eigenschaften gehören nicht zu den wesentlichen, sondern zu den zufälligen Eigenschaften des Quadrats, welches der Fußboden bildet. Man muß daher wesentliche und nicht-wesentliche (unwesentliche) Merkmale eines Gegenstandes wohl von einander unterscheiden.

15. Wesentlich heißen die Merkmale eines Begriffes, welche zum eigentlichen Wesen desselben gehören, durch welche der Begriff erst das ist, was er ist, und ohne welche er aufhören würde, das zu sein, was er ist. Diejenigen Merkmale, welche auch von einem Begriffe weggedacht werden können, ohne daß sich etwas Wesentliches an ihm ändert, heißen unwesentliche Merkmale desselben.

Wesentliche Merkmale des Kreises sind z. B.: ebene Figur und gleiche Entfernung der Peripherie vom Mittelpunkte.

Unwesentliche Merkmale des Kreises sind: die Größe und Lage des Kreises.

Wesentliche Merkmale des △ sind: begränzte Fläche und Dreiseitigkeit.

Unwesentliche Merkmale des △ sind: Recht-, Spitz-, oder Stumpfwinkligkeit, Länge der Seiten u. s. w.

Wesentliche Merkmale des Fisches sind: rothes, kaltes Blut, Athmen durch Kiemen, Flossen u. s. w.

Unwesentliche Merkmale des Fisches sind: Leben im See- oder Flußwasser, Geschmack desselben u. s. w.

§. 20. Beurtheilung und Verbesserung geometrischer Erklärungen und Aussprüche.

Daß die Mathematik ein ganz vorzügliches Mittel der Sprachbildung sei, ein Mittel, genau, scharf und deutlich seine Gedanken auszudrücken, ist längst anerkannt. Wie kann es auch anders sein? Wenn die Mathematik zu den vorzüglichsten Erweckungsmitteln des menschlichen Verstandes, überhaupt des Denkvermögens, gehört, so muß auch die Sprache, weil durch Sprechen die Gedanken laut werden, durch mathematische Uebungen gewinnen, und die durch sie dem Kopfe zu erwerbende Klarheit muß einen großen Einfluß

Digitized by Google

auf Deutlichkeit und Schärfe des Ausdrucks gewinnen. Aber man bringt sich um diesen großen Vortheil, wenn man dem Schüler halbe Antworten in halb richtigem Deutsch hingehen läßt; wenn man ihn nicht mit allem Ernste und mit unermüdeter Zähigkeit dazu veranlaßt, sich nach richtigen Begriffen und nach richtigem Ausdrucke derselben umzusehen. Diese beiden Erfordernisse sind ganz unerlaßlich, wenn der mathematische Unterricht seine tiefbildende Wirkung nicht verfehlen, sondern als eine wirkliche Geistesgymnastik seinen Zweck erreichen soll. Richtige Begriffe und richtiger Ausdruck!

Jene fördern diesen, und dieser fördert jene. Darum halte man nicht einseitig nur auf das eine dieser Erfordernisse; sondern man strebe nach beiden. — Aus diesen Gründen soll der Lehrer mit besonderer Aufmerksamkeit darauf sehen, daß alle Begriffe möglichst genau und scharf gefaßt und erklärt werden. Im praktischen Leben müssen wir uns sehr häufig mit Beschreibungen und Umschreibungen begnügen; nicht so in der Mathematik. Hier gilt allein die streng logische Definition, so kurz und bündig ausgedrückt, als möglich, ohne Ueberfluß an Worten, wie ohne Mangel der wesentlich erforderlichen. — Darum lege man dem Schüler fehlerhafte Erklärungen und Definitionen vor, und gebe ihm zur Verbesserung derselben die nöthige Anleitung.

1. Wenn man sagt: der Triangel hat 3 Seiten und 3 Winkel — das Quadrat hat 4 gleiche Seiten und Winkel — so ist weder gegen den Inhalt, noch gegen die Form dieser Sätze etwas einzuwenden; man ist aber darum noch nicht berechtigt, zu sagen: der dreiseitige oder der dreiwinklige Triangel — das gleichseitige oder das gleichwinklige Quadrat. Denn in dem Begriffe des Dreiecks liegt schon das Merkmal der Dreiseitigkeit und Dreiwinkligkeit, wie in dem Begriffe des Quadrats die Merkmale der Gleichseitigkeit und Gleichwinkligkeit. Man drückt also auf diese Weise dasselbe Merkmal zweimal aus; einmal durch das Subject und das andre Mal durch das demselben einverleibte Eigenschaftswort. Nur in dem Falle wäre die Zusammensetzung »dreiseitiger Triangel« zu dulden, wenn es auch nicht-dreiseitige z. B., vierseitige Triangel gäbe, zu welchem Irrthum jene Zusammensetzung Veranlassung giebt. Denn wenn ein Triangel an und für sich, wie es der Fall ist, 3 Seiten hat, so darf ich ihn nicht einen dreiseitigen Triangel nennen. — Ein ganz Anderes aber ist es, wenn ich das Adjectiv hinter das Substantiv setze, und sage: der Triangel ist dreiseitig. Es ist dieß ein analytisches Urtheil, durch welches ich ein in dem Subjectbegriff enthaltenes Merkmal besonders heraushebe, um den Subjectbegriff dem Nichtkenner durch Angabe seines Inhaltes deutlich zu machen. Derjenige, zu welchem ich sage, daß der Triangel dreiseitig, das Quadrat gleichwinklig sei, kennt diese Eigenschaften des Triangels und

Digitized by Google

des Quadrats nicht; er soll durch diese Mittheilung diese Begriffe kennen lernen. Dieß geschieht, indem ich ihn mit den Merkmalen in dem Inhalte dieser Begriffe bekannt mache. Aus diesen Gründen ist der Ausdruck erlaubt: der Kreis ist rund; darum aber mit nichten: der runde Kreis. Von einem runden Kreise könnte man nur sprechen im Gegensatze mit nicht-runden Kreisen; wenn es z. B. eckige Kreise gäbe. Obgleich daher der Ausdruck »runder Kreis« nicht gerade einen Widerspruch enthält, so verleitet er doch leicht zu Widersprüchen; er ist daher durchaus zu verwerfen. — In manchen populären Büchern ist zuweilen die Rede von verschobenen Quadraten und schiefen Würfeln. Unter einem verschobenen Quadrate wird die Raute verstanden, und wirklich entsteht dadurch, daß man die Seiten eines Quadrates so verschiebt, daß die einander gegenüberstehenden Seitenpaare ihre parallele Lage nicht ändern, eine Raute. Allein dieß berechtigt Niemand, von einem verschobenen Quadrat zu reden. Denn ein Quadrat ist eine vierseitige ebene Figur mit gleichen Seiten und rechten Winkeln. Diese Definition enthält den Ausdruck der wesentlichen Merkmale des Begriffes »Quadrat«. Nehme ich eins dieser wesentlichen Merkmale weg, so hört der Gegenstand, welcher vorher ein Quadrat war, auf, ein Quadrat zu sein. Durch die eben angedeutete Verschiebung geschieht dieß, indem die rechten Winkel sich in schiefe verwandeln. Nun ist die Figur gar kein Quadrat mehr; daher kann ich sie auch nicht ein verschobenes Quadrat nennen. Denn ein verschobenes Quadrat, das kein Quadrat wäre, stellt einen offenbaren Widerspruch dar.

2. Die Aufgaben unter Nummer 2 fordern Unmögliches; denn Etwas, das nicht denkbar ist, kann auch nicht dargestellt werden, weil es gar nicht existiren kann. Die Ausdrücke: viereckiger Kreis, stumpfwinkliges gleichschenkliges △ u. s. w. enthalten widersprechende Merkmale; denn ein Kreis ist rund und nicht viereckig, und ein stumpfwinkliges △ ist nicht gleichschenklig, und ein gleichschenkliges △ kann nicht stumpfwinklig sein. Aus denselben Gründen ist ein geradliniges △ unmöglich, welches zwei Winkel enthielte, von welchen jeder = R wäre; denn ein geradliniges △ kann nur einen rechten Winkel enthalten. — Nebenwinkel sind zusammen = 2 R; daher enthält die Forderung; ein Nebenwinkelpaar darzustellen, von welchem jeder Winkel spitz ist, etwas Widersinniges.
3. Solchen Ausdrücken, wie die vorstehenden sind, entspricht keine Vorstellung, kein Gedanke. Sie erinnern nicht an Dinge, sondern an Nicht-Dinge oder Undinge. Sie enthalten Absurditäten, offenbare Widersprüche. Man nennt sie auch logische Undinge, weil der Verstand die im Ausdrucke vereinigten Merkmale in der Vorstellung unvereinbar findet. Der-

Digitized by Google

gleichen sind unter andern noch diese: eine gerade Krümmung — ein schief stehendes Perpendikel — ein vierseitiger Triangel — hölzernes Eisen u. s. w.

4. Der Ausspruch: »eine Linie heißt gerade, wenn sie auf allen Seiten dieselbe Beschaffenheit hat« ist in mehrfacher Hinsicht fehlerhaft, und kann nicht für eine Definition der geraden Linie gelten. Man kann nicht im eigentlichen Sinne des Wortes von Seiten einer geraden Linie sprechen. Das Wort Seite paßt nur für körperliche Gegenstände. Auch das Wort Beschaffenheit ist von viel zu allgemeiner und darum unbestimmter Bedeutung, als daß es dazu dienen könnte, das Wesen der geraden Linie zu erklären. Außer diesen Bemerkungen gegen einzelne Wörter des obigen Satzes muß auch der Inhalt der Worte desselben noch getadelt werden. Denn hat nicht eine regelmäßig gekrümmte Schlangenlinie, also eine krumme Linie, auch auf den Seiten dieselbe Beschaffenheit? Der für eine Definition ausgegebene Ausdruck paßt also sowohl für die gerade als für die krumme Linie; er ist daher zu verwerfen.

Die gerade Linie erinnert uns übrigens recht lebhaft daran, daß Tadeln leichter ist als Bessermachen. Denn man versuche die Definition der geraden Linie und — man wird Schwierigkeiten finden. — Aus keinem andern Grunde, als weil die gerade Linie als ein einfaches Object zu wenig Merkmale hat. — Aber dennoch ist es belehrend und bildend, zu sagen, daß und warum ein Ausdruck nicht richtig ist, wenn man sich auch außer Stand fühlt, einen allen Anforderungen entsprechenden hinzustellen. Prüfen wir darum noch kurz die folgenden Aussprüche!

»Eine gerade Linie ist eine solche, welche die wenigsten Punkte zwischen zwei gegebenen Punkten enthält«. Hier bemerken wir

1. daß eine gerade Linie nicht nothwendig zwischen gegebenen Punkten liegt; daß eine gerade Linie unbegränzt, also, gar nicht zwischen festen Punkten liegend, gedacht werden kann, ohne aufzuhören, eine g. L. zu sein.
2. Der Punkt hat keine Ausdehnung; er bezeichnet nur eine Stelle im Raum; innerhalb der kleinsten geraden Linie kann man daher unzählig viel Punkte annehmen, und man kann gar nicht sagen, ob eine längere oder kürzere gerade Linie die meisten Punkte zwischen ihren Endpunkten enthalte. Denn die Entfernung zweier Punkte wird durch Punkte gar nicht erfüllt, oder man müßte den Punkt als etwas räumlich Ausgedehntes ansehen, was bekanntlich nicht zulässig ist.

»Eine gerade Linie ist eine solche, welche nur eine

Digitized by Google

Richtung hat«, beſſer: deren Punkte alle in derſelben Richtung liegen. Dieſe Definition wäre nicht übel, wenn die Vorſtellung »Richtung« gedacht werden könnte ohne die Vorſtellung »gerade Linie«. Die Vorſtellungen »Richtung« und »gerade Linie« ſind ganz einerlei (identiſch). »Richtet euch!« heißt: ſtellet euch in gerade Linie! Obige Definition nennt uns alſo ein Prädikat, welches mit dem Subject eins iſt, und ſagt nichts mehr, als der Ausſpruch: »Eine g. L. iſt eine ſolche, welche eine g. L. iſt.« Man kommt alſo durch dieſelbe, vom Subjectbegriff ausgehend, wieder dahin, von wo man ausgegangen war, nämlich zum Subjectbegriffe zurück. Die durch dieſe Definition erregten Vorſtellungen machen daher einen Cirkel; deßhalb iſt ſie zu verwerfen.

»Die krumme Linie iſt von Punkt zu Punkt ungerade.« Dieſes iſt eine Beſchreibung der krummen Linie, aber keine Definition. Als ſolche kann ſie paſſiren.

»Die krumme Linie iſt eine ſolche, welche, da ſie keine gerade Linie mehr enthält, aus einer Reihe von Punkten beſteht.« Falſch; denn eine Reihe von Punkten bildet noch keine krumme Linie, überhaupt gar keine Linie. Ueberdieß könnte man eben ſo gut auch von der geraden Linie ſagen, »ſie beſtehe aus einer Reihe von Punkten.«

5. »Die Kreislinie iſt eine in ſich ſelbſt zurücklaufende krumme Linie, worin alle Punkte vom Mittelpunkte gleiche Entfernung haben.«

   1. Das Wort »Mittelpunkt« darf nur da gebraucht werden, wo gleiche Entfernung von den Enden des Gegenſtandes ſtatt findet. Der letzte Theil der Definition ſetzt alſo ſchon voraus, was erſt erklärt werden ſoll.

   2. Auch alle Punkte einer unregelmäßig krummen Linie auf der Oberfläche einer Kugel haben gleiche Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel; alſo wäre auch jede ſolche unregelmäßig krumme Linie eine Kreislinie, welches falſch iſt. — Hier iſt das bekannte Merkmal (Kriterium) einer richtigen Definition gebraucht worden, welches darin beſteht, daß die Definition auch umgekehrt richtig befunden wird. Z. B.: das Dreieck iſt eine dreiſeitige Figur. Iſt dieſe Erklärung richtig, ſo muß auch wahr ſein: jede dreiſeitige Figur iſt ein Dreieck; oder: Alles, was dreiſeitige Figur iſt, iſt auch Dreieck. Jede Definition, welche eine ſolche Umkehrung nicht zuläßt, hat Fehler. Z. B. Ein Parallelogramm iſt eine geradlinige Figur, in welcher die einander gegenüberſtehenden Seitenpaare gleichlaufend ſind. Umgekehrt: jede geradlinige Figur, in welcher die einander gegenüber-

Digitized by Google

stehenden Seitenpaare gleichlaufend sind, ist ein Parallogramm. Dieser Satz ist falsch; denn ein Sechs-, Acht-, Zehneck u. s. w. kann auch die verlangte Eigenschaft haben; also wäre auch ein solches Sechs-, Acht-, Zehneck ein Parallelogramm. Da dieses falsch ist, so muß jene erste Erklärung einen Fehler enthalten. Derselbe ist nicht schwer zu entdecken. Es fehlt das Wort »vierseitige.« —

»Die Kreislinie bildet den Uebergang von den geraden zu den krummen Linien.«

Was den Uebergang von einem Gegenstande zum andern in geistiger Beziehung bildet, hat mit den beiden Gegenständen, welche verbunden werden, Verwandtschaft und Aehnlichkeit, welche sich durch gemeinschaftliche Merkmale ausspricht. Doch ist der Uebergangs-Gegenstand nicht selbst einer der beiden, zwischen welchen er die Verbindung darstellt; auch nicht gleich einem derselben. — Folglich müßte die Kreislinie Aehnlichkeit haben mit der geraden und der krummen Linie, ohne doch das Eine oder Andere ganz zu sein. Es gäbe also Linien, welche weder gerade, noch krumm wären. Da Letzteres falsch ist, so taugt auch obige Erklärung nicht.

»Ein Punkt, welcher sich nach allen Seiten gleichförmig ausgedehnt hat, heißt ein Kreis.«

Zugegeben; aber dann hieße mit gleichem oder mit größerem Rechte auch die Kugel ein Kreis. — Uebedieß bemerke man, daß der Punkt »Kreis« genannt wird. Also wäre der Punkt auch zugleich ein Kreis. Denn dadurch, daß sich ein Punkt ausdehnt, hört er ja nicht auf, ein Punkt zu sein. Der Kreis wäre also ein ausgedehnter Punkt, folglich doch immer ein Punkt. Lauter Widersprüche!

»Quadrat heißt der rechte Bogen.«

Hier sollte man glauben, daß der rechte Bogen dem linken, oder dem unrechten Bogen entgegengesetzt wäre. »Rechter Bogen« bezeichnet gar keine klare Vorstellung.

6. »Ein Winkel ist die Verbindung zweier geraden Linien.« Kehrt man um und spricht: »jede Verbindung zweier geraden Linien ist ein Winkel«, so wird die Unrichtigkeit des Ausspruches klar. Es giebt Verbindungsweisen zweier geraden Linien, z. B. In-einander-fallen oder das Decken derselben, wodurch kein Winkel entsteht. Treffender ist diese Erklärung:

»Ein Winkel ist der Unterschied der Richtungen zweier

Digitized by Google

geraden Linien, welche von demselben Punkte auslaufen.« Gegen die Richtigkeit derselben läßt sich nichts einwenden; nur ist der Ausdruck »Unterschied der Richtungen« für den Anfänger nicht klar genug.

»Winkel ist die von zwei geraden Linien begränzte Ebene, welche auf der dritten Seite noch gänzlich unbegränzt ist.«

Demnach wäre der Winkel eine Ebene. Aber dieß ist falsch. Zwar liegt der Winkel in einer Ebene, oder vielmehr, man kann durch jeden geradlinigen Winkel eine Ebene legen; aber dennoch ist der Winkel keine »Ebene.« Dazu: »eine begränzte Ebene, welche unbegränzt ist«; also eine (auf der dritten Seite) unbegränzte begränzte Ebene!?

Noch obendrein hat die Begränzung oder Nichtbegränzung der Ebene des Winkels mit dem Wesen des Winkels gar nichts zu schaffen. Ein Winkel hört nicht auf, ein Winkel zu sein, die Winkelebene mag begränzt sein, oder nicht.

»Der Winkel von 180° ist der Urwinkel.«

Winkel entstehen nicht auseinander und folgen nicht so auf einander, wie Saamenkörner und Pflanzen, wie Tage und Jahre, wie Eltern und Kinder. Man kann daher wohl von Urzeiten, Ureltern und allenfalls von Urwelten sprechen, nicht aber von Urwinkeln. Von den Winkeln ist keiner der erste und der letzte; keiner ist der Vater der andern. — Solche und ähnliche Uebertragung der Verhältnisse der äußeren Natur auf Mathematik und Gegenstände reiner Erkenntniß überhaupt — verwirrt.

7. »Ein Dreieck ist eine Figur, welche von 3 Seiten eingeschlossen ist.« — Richtig oder unrichtig?

Da ein △ 3 Seiten hat und von 3 Seiten eingeschlossen ist, so liegt also in dem Nebensatze keine Unrichtigkeit. Das noch übrig bleibende ist »Figur«. Ein △ ist aber wirklich eine Figur. Also auch richtig. Die Definition scheint daher keine Unrichtigkeit zu enthalten. Und doch ist es so. Zwar liegt in den einzelnen Theilen derselben nichts Verkehrtes; aber in der Verbindung der Theile. Denn was ist eine Figur? Eine Figur ist eine auf allen Seiten, oder ringsum, eingeschlossene Fläche. Obige Definition heißt also mit andern Worten so:

»Ein △ ist eine auf allen Seiten eingeschlossene Fläche, welche von 3 Seiten eingeschlossen ist.« Hier sehen wir, daß das Merkmal »eingeschlossen« zwei Mal in der Definition vorkommt; denn einmal liegt es schon in dem Begriffe »Figur«, und das andere Mal ist es im Beisatze ausgesprochen.

Die Definition enthält daher zwar keine logische Unrichtigkeit; aber doch einen Fehler gegen den richtigen (präcisen) Ausdruck.

Digitized by Google

»Ein Dreieck, worin ein rechter Winkel und zwei spitze liegen, heißt ein rechtwinkliges.«

Auch dieser Ausspruch enthält nichts Unrichtiges, aber etwas Ueberflüssiges; denn wenn ein Winkel eines (geradlinigen) Dreiecks ein rechter ist, so müssen die beiden andern spitz sein. Jede Definition soll aber so kurz als möglich sein, und nicht die nothwendigen Folgen der Merkmale des erklärten (definirten) Gegenstandes aufzählen. Ein Anfänger, welcher nicht weiß, daß der rechte Winkel eines Dreiecks das Spitzsein der andern mit Nothwendigkeit herbeiführt, darf sich allenfalls, wie oben angegeben, ausdrücken, wenn er einmal vom rechtwinkligen △ reden will. —

Ganz dieselben Bemerkungen treffen auch das Urtheil: »Ein Dreieck, in welchem ein stumpfer und zwei spitze Winkel liegen, heißt ein stumpfwinkliges.«

8. »Vierecke, welche lauter gleiche Seiten haben, heißen Quadrate.« Also wären Gleichseitigkeit und Vierseitigkeit die einzigen wesentlichen Merkmale der Quadrate. Aber diese Merkmale finden sich auch an der Raute. Folglich wäre die Raute = Quadrat. Es fehlt das wesentliche Merkmal »Gleichwinkligkeit.«

»Figuren, in welchen je zwei und zwei einander gegenüberstehende Seiten parallel sind, heißen Parallelogramme.«

Die Mangelhaftigkeit dieser Erklärung ist unter Nro. 5 bereits nachgewiesen.

»Figuren, deren Seiten alle einander gleich sind, sind reguläre Figuren« muß heißen: »deren Seiten und Winkel u. s. w. Denn die Gleichseitigkeit allein macht nicht die Regelmäßigkeit der Figuren aus. Es giebt unregelmäßige Figuren, deren Seiten dennoch alle gleich sind.

»Eine Figur heißt unregelmäßig, wenn weder alle Seiten, noch alle Winkel gleich sind.«

Das »weder,« »noch« ist überflüßig, und schon der Mangel eines dieser Merkmale schließt eine Figur von den regelmäßigen aus. Der Ausdruck verleitet zu der Meinung, daß Gleichseitigkeit oder Gleichwinkligkeit allein schon hinreiche, eine Figur regelmäßig zu machen.

»Eine Ebene ist eine solche Fläche, worin alle Theile gleiche Lage haben. Uneben oder gekrümmt heißt sie, wenn kein Theil derselben eben ist.«

Der Ausdruck »gleiche Lage haben« ist zu unbestimmt. Man kann auch von den Theilen der Oberfläche einer Kugel sagen: sie haben gleiche Lage. Und diese Unbestimmtheit trägt sich auf die Erklärung der gekrümmten Fläche (unrichtig Ebene, denn eine Ebene kann nicht krumm sein) über, da dieselbe bloß durch die Verneinung des Merkmals »eben« erklärt wird.

Digitized by Google

Uebersicht dieses §.

Nro. 1 stellt fehlerhafte Zusammensetzungen von Subject- und Prädicatbegriffen auf;

Nro. 2 u. 3 verlangen Unmöglichkeiten oder Undinge.

Nun kommen fehlerhafte Definitionen; nämlich unter

Nro. 4 über gerade und krumme Linien im Allgemeinen;

Nro. 5 über Kreislinie und Bogen;

Nro. 6 über Winkel;

Nro. 7 über Triangel; endlich unter

Nro. 8 über andere Figuren und Flächen.

§. 21. Mathematische Grundsätze, Definitionen und Folgerungen.

Wie jeder Wissenschaft, so liegen auch der Geometrie und der Mathematik gewisse Wahrheiten zu Grund, auf welche sich alle andern Wahrheiten zurückführen, durch welche sich alle andern beweisen, von welchen sich alle ableiten lassen, die selbst aber nicht weiter ableitbar sind. Jene sind also des Beweises fähig und in der Regel auch bedürftig; diese aber sind des Beweises weder bedürftig noch fähig; jene werden unserem Geiste mittelbar, d. h., vermittels anderer Wahrheiten, diese ihm unmittelbar, an und für sich selbst, gewiß. Der Geist ist der Gewißheit der letztern unmittelbar versichert; ihre Wahrheit leuchtet ihm von selbst ein. Daher können diese keine andern als sehr einfache Wahrheiten sein. Man nennt sie Grundsätze, indem sie den übrigen ableitbaren Wahrheiten zu Grund liegen. Ihr Charakter ist Einfachheit, folglich Allgemeinheit, und unmittelbare Gewißheit.

Da diese Grundsätze allem Denken zu Grund liegen, und namentlich außer den logischen Grundsätzen die mathematischen Grundsätze dem mathematischen Denken; so sind sie in allen bisher entwickelten mathematischen Sätzen vorgekommen. Die Aufstellung derselben geschieht daher hier nicht deßwegen, um neue Wahrheiten zu finden, sondern nur, um sich der einfachsten, den ableitbaren Sätzen zu Grund liegenden Sätze bewußt zu werden, und um uns über das Grundwesen der Sache, mit welcher wir uns beschäftigen, zu verständigen.

Wir verfahren hier dem pädagogischen Grundsatze gemäß, welcher verlangt, daß die Uebung der Erforschung der Regel und des Gesetzes vorhergehen solle. Schüler, welche bis zum 21. §. dieses Werkchens geführt worden sind, haben alle anzuführenden logischen und mathematischen Grundsätze hundertfach angewandt und rich-

Digitized by Google

tig angewandt. Sie kennen dieselben also durch Gebrauch und Uebung. Und das ist vorerst allerdings die Hauptsache. Nun sollen sie sich derselben aber auch klar bewußt werden; sie sollen dieselben nun für sich betrachten, entkleidet von dem Gehalte, unter welchem sie versteckt sind.

Wir schließen daher unsere fortgesetzten Betrachtungen an bekannte Wahrheiten an, nicht um aus ihnen die Grund- und Ursätze abzuleiten, sondern um durch sie dieselben zu finden. Der gebildete Verstand unterscheidet sich nicht dadurch von dem ungebildeten, daß er seinen Gedanken Grundsätze unterlegt, welche dieser nicht kennt, sondern dadurch, daß jener ein klares Bewußtsein über die Formen und Operationen gewonnen hat, welche diesen, wie überhaupt den praktischen Menschenverstand, bei seinen Thätigkeiten leiten.

---

1. Erster Grundsatz.

Jede Größe, z. B. die Größen: Linie, Fläche, Körper, Zahlen u. s. w., können wir uns in zwei, drei, vier und mehr, überhaupt in eine beliebige Anzahl von Theilen getheilt denken. Wir nennen die getheilte Größe, in Beziehung auf die Theile, das Ganze. Alle Theile zusammen, in welche ein Ganzes getheilt worden ist, machen zusammen wieder das Ganze aus. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich, oder: das Ganze ist so groß, wie alle Theile desselben zusammen. Nehme ich einen oder mehrere, aber nicht alle Theile eines Ganzen, so habe ich noch nicht das Ganze, sondern weniger als das Ganze. Ein Theil, oder einige Theile eines Ganzen sind kleiner als das Ganze, und umgekehrt — das Ganze ist größer als ein Theil oder als einige Theile desselben.

Wird eine Linie oder ein Winkel in 4 gleiche oder ungleiche Theile getheilt, so ist die Linie, der Winkel, diesen 4 Theilen zusammengenommen gleich, aber größer als ein, zwei oder drei dieser Theile, und ein, zwei oder drei dieser Theile sind kleiner als das Ganze.

Wenn $12 = 6 + 3 + 2 + 1$, so ist

$12 > 6$

> 3 u. s. w.

$> 6 + 3$

$> 6 + 3 + 2$

$> 6 + 2 + 1$, und

$6 < 12$

$6 + 3 < 12$

$6 + 3 + 2 < 12$

$6 + 3 + 2 + 1 = 12.$

Digitized by Google

Der erste Grundsatz heißt:

Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich. Daraus folgt, daß das Ganze größer ist als ein oder mehrere seiner Theile, und daß jeder Theil eines Ganzen kleiner ist als das Ganze.

2. Zweiter Grundsatz.

Wenn ich 2 Größen in Bezug auf ein gemeinschaftliches Merkmal mit einander vergleiche, so haben sie dieses gemeinsame Merkmal entweder in gleichem oder in ungleichem Grade. Vergleiche ich 2 Gegenstände in Bezug auf ihre Größe mit einander, so sind sie entweder gleich groß, oder ungleich groß. Kein dritter Fall findet statt. Heißen diese Größen a und b, so ist a entweder gleich b, oder nicht gleich b. In dem letzteren Falle findet das Doppelte statt, daß entweder a, oder b am größten ist. Jene beiden Hauptfälle bilden also die 3: a ist entweder $= b$, oder a ist $> b$, oder a ist $< b$.

$$a \begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix} b.$$

Vergleiche ich eine Größe mit sich selbst in Ansehung ihrer Größe, so finde ich die Wahrheit, daß jede Größe nicht größer und nicht kleiner als sie selbst, sondern daß jede Größe nothwendig sich selbst gleich sei.

$$a = a$$

$$b = b \text{ u. s. w.}$$

Der zweite Grundsatz heißt:

Zwei Größen sind entweder einander gleich, oder ungleich, und jede Größe ist sich selbst gleich.

3. Dritter Grundsatz.

Wenn Adolph so groß ist als Wilhelm, und Wilhelm so groß ist als Fritz, so ist nothwendig auch Adolph so groß als Fritz.

1. Da $12 = 9 + 3$,
und $12 = 8 + 4$
so ist auch $9 + 3 = 8 + 4$.

2. $16 = 12 + 4$
$24 - 8 = 16$
$24 - 8 = 12 + 4$

3. $\triangle$ abc = Viereck abcd
$\triangle$ abc = Sechseck abcdef
Viereck abcd = Sechseck abcdef.

4. Linie ab = Linie cd
Linie ab = Linie ef
Linie cd = Linie ef.

5. $\angle a + \angle b + \angle c = 2$ R
$\angle c + \angle f = 2$ R
$\angle a + \angle b + \angle c = \angle e + \angle f$.

6. Allgemein, wenn $a = b$
und $c = b$
so ist auch $a = c$;

oder wenn $x = y + z$
$y + z = t$
$x = t$.

Digitized by Google

Der dritte Grundsatz heißt:

Wenn zwei Größen einer und derselben (dritten) Größe gleich sind, so sind sie auch unter einander gleich.

Dritte Größe heißt diejenige, welche jeder der beiden Größen gleich ist, welche die Vermittlung zwischen den beiden bildet. In Beisp. 1 ist 12, in Beisp. 5 ist 2 R, in Beisp. 6 ist b die dritte Größe.

Zusatz.

Wenn a = b
b = c
c = d
d = e
e = f

so ist auch a = f. Diesen zusammengesetzten Schluß könnte man auch in folgende einfache, in welchen der dritte Grundsatz angewandt wird, auflösen:

a = b
b = c

a = c (dritter Grundsatz). Nach der Bedingung ist auch c = d

a = d (3 G.).
Ferner d = e (Bedingung)

a = e (3 G.).
e = f (Bedingung)

a = f.

Dieser Satz heißt, in Worten ausgedrückt:

Wenn eine Größe einer zweiten, diese zweite einer dritten, diese dritte einer vierten u. s. w. gleich ist, so ist auch die erste gleich der dritten, vierten u. s. w.; überhaupt sind alle diese Größen einander gleich. —

Wenn a = b
und c = d, so kann der dritte Grundsatz darauf gar nicht angewandt werden. Denn hier sind 4 Größen aufgestellt, von welchen zwar je 2 und 2 einander gleich sind; aber die vermittelnde dritte fehlt.

4. Vierter Grundsatz.

Man nennt die Sätze, welche als wahr vorausgesetzt werden und aus welchen etwas gefolgert werden soll, die Vordersätze (Prämissen) und den daraus abgeleiteten Satz den Schlußsatz (die Conclusion). In unsern Beispielen stehen die Vordersätze über dem Striche; der Schlußsatz kommt unter denselben zu stehen. Der Strich bedeutet, daß der dritte Satz aus den beiden ersten abgeleitet ist.

Digitized by Google

20	>	16	a	=	b	a	<	b
16	=	2.8	b	>	c	b	=	c
20	>	2.8	a	>	c	a	<	c

a	=	b	a	=	b
b	>	c	b	<	c
a	>	c	a	<	c

Vierter Grundsatz: Wenn eine von zwei gleichen Größen größer oder kleiner ist als eine dritte, so ist auch die andere der beiden gleichen Größen größer oder kleiner als die dritte.

Die vorstehenden allgemeinen Beispiele unterscheiden sich bloß dadurch von einander, daß die gleichen Größen theils die erste, theils die zweite Stelle einnehmen, und daß von den ungleichen Größen die größere theils voransteht, theils nachfolgt.

5. Fünfter Grundsatz.

20	>	16	8	<	10	a	>	b	a	<	b
16	>	12	10	<	12	b	>	c	b	<	c
20	>	12	8	<	12	a	>	c	a	<	c

Fünfter Grundsatz: Wenn eine Größe größer oder kleiner ist als eine andere, diese andere größer oder kleiner ist als eine dritte; so ist auch die erste größer oder kleiner als die dritte.

Im ersten Beispiele ist 20 die größte, 16 die mittlere, 12 die kleinste der 3 Größen; 16 ist > 12 und 20 ist > 16; woraus folgt, daß 20 auch > 12. 20 war also größer als eine Größe, welche größer war als eine dritte; 20 war also größer als eine größere, welche hier in Bezug auf eine dritte größere genannt wird. Daher kann man den fünften Grundsatz auch so ausdrücken: Was größer ist als das Größere, ist auch größer als das Kleinere; was kleiner ist als das Kleinere, ist auch kleiner als das Größere.

Zusatz 1.

a	>	b	a	<	b
b	>	c	b	<	c
c	>	d	c	<	d
d	>	e	d	<	e
a	>	e	a	<	e

Diese beiden zusammengesetzten Schlüsse kann man sehr leicht wieder in einzelne auflösen.

Erster Schluß. Vordersätze: a > b, b > c — 1. a < b, b < c

Schlußsatz a > c (5 Gr.) — a < c

Digitized by Google

Zweiter Schluß. Vordersätze: a > c, c > d — Schlußsatz: a > d

2. a < c, c < d — a < d

Dritter Schluß. Vordersätze: a > d, d > e — Schlußsatz a > e (5 G.)

3. a < d, d < e — a < e

In Worten: Wenn eine Größe größer oder kleiner ist als eine zweite, diese zweite größer oder kleiner als eine dritte, diese dritte größer oder kleiner als eine vierte u. s. w., so ist auch die erste größer oder kleiner als die vierte, und größer oder kleiner als alle andern.

Zusatz 2.

Zwischen 2 Größen finden, wie oben gezeigt worden ist, in Ansehung ihrer Größe 3 Fälle statt; a ist entweder =, > oder < als b. Dasselbe gilt von den 2 Größen b und c. Verbinde ich diese Fälle so, daß mit jedem der 3 ersten Fälle nach und nach die 3 andern verbunden werden, so entstehen höchstens 3.3 oder 9 Verbindungen. Denn

1. mit dem ersten Falle, a = b, kann c $\begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix}$ d
2. = = zweiten = a > b, = =
3. = = dritten = a < b, = =

verbunden werden. Dieses giebt 9 Fälle, welche dieser Zusatz aufstellt.

1. a = b.
   a) a = b, b = c — a = c (3 G.)
   b) a = b, b > c — a > c (4 G.)
   c) a = b, b < c — a < c (4 G.)
2. a > b.
   a) a > b, b = c — a > c (4 G.)
   b) a > b, b > c — a > c (5 G.)
   c) a > b, b < c —
3. a < b.
   a) a < b, b = c — a < c (4 G.)
   b) a < b, b > c —
   c) a < b, b < c — a < c (5 G.)

In den Fällen 2,c und 3,b fehlen die Schlußsätze. Warum? — Weil die vorigen Grundsätze, auf diese Vordersätze angewandt, zu keinem Schluße berechtigen. Denn es folgt hier nicht, daß

Digitized by Google

$a \gtreqless c$ sei. Ein jeder dieser Fälle kann statt finden, unbeschadet der Wahrheit der Prämissen. Es sei z. B. nach 2,c

$$\begin{array}{rcl} 12 > 10 & 12 > 10 & 12 > 10 \\ 10 < 11 & 10 < 13 & 10 < 12 \\ \hline \text{und } 12 > 11 & 12 < 13 & 12 = 12 \end{array}$$

aber die unter den Strichen stehenden Sätze folgen nicht aus den Vordersätzen.

Ebenso verhält sich's mit 3,b.

6. Sechster Grundsatz.

Werden zu gleich langen Linien gleiche Stücke hinzugefügt, so entstehen wieder gleiche Linien; die beiden ersten sind zusammen so lang, wie die beiden andern zusammen.

$$\begin{array}{c} 20 = 2.10 \\ 6 = 2.3 \\ \hline 20+6 = 2.10+2.3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = b \\ c = d \\ \hline a+c = b+d \end{array} \qquad \begin{array}{c} \llcorner o = \llcorner x \\ \llcorner y = \llcorner z \\ \hline \llcorner o + \llcorner y = \llcorner x + \llcorner z \end{array}$$

Sechster Grundsatz. Gleiche Größen zu gleichen Größen addirt, giebt gleiche Summen; oder Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches.

Zusatz.

1. $$\begin{array}{c} a = b \\ a = b \\ \hline \left.\begin{array}{c} a+a \\ 2a \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} b+b \text{ (6 G.)} \\ 2b \end{array}\right. \end{array}$$

2. $$\begin{array}{c} 2a = 2b \\ a = b \\ \hline \left.\begin{array}{c} 2a+a \\ 3a \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2b+b \text{ (6 G.)} \\ 3b \end{array}\right. \text{ u. s. w.} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{c} a = a \\ a = a \\ \hline \left.\begin{array}{c} a+a \\ 2a \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a+a \text{ (6 G.)} \\ 2a \end{array}\right. \end{array}$$

4. $$\begin{array}{c} 2a = 2a \\ a = a \\ \hline \left.\begin{array}{c} 2a+a \\ 3a \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2a+a \text{ (6 G.)} \\ 3a \end{array}\right. \text{ u. s. w.} \end{array}$$

d. h. wenn 2 Größen einander gleich sind, so sind auch ihre gleich vielfachen einander gleich.

7. Siebenter Grundsatz.

In dem unmittelbar Vorhergehenden wandten wir die Operation der Addition auf gleiche Größenpaare an. Dasselbe thun wir nun mit den übrigen Grundoperationen der Zahlenlehre. Zuerst die Subtraction.

$$\begin{array}{c} 24 = 8.3 \\ 10 = 5.2 \\ \hline 24-10 = 8.3-5.2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = b \\ c = c \\ \hline a-c = b-c \end{array}$$

Wenn von gleich langen Linien, oder von 2 gleich großen Figuren, gleiche Stücke abgeschnitten werden, so sind die übrig blei-

Digitized by Google

benden Stücke einander gleich. — Je zwei Winkel, welche Nebenwinkel zu einander sind, sind zusammengenommen = 2 R; folglich sind alle Nebenwinkel-Paare einander gleich. Ist nun ein Winkel des ersten Nebenwinkel-Paares gleich einem Winkel des zweiten Nebenwinkel-Paares, so ist nothwendig der zweite Winkel des ersten Nebenwinkel-Paares gleich dem zweiten Winkel des zweiten Nebenwinkel-Paares.

Siebenter Grundsatz: Wenn man gleiche Größen von gleichen Größen abzieht, so bleiben gleiche Reste; oder: wenn die Minuenden und Subtrahenden gleich sind, so sind auch die Differenzen (Unterschiede) gleich; oder Gleiches von Gleichem bleibt Gleiches.

8. Achter und neunter Grundsatz.

1.
$$\begin{array}{r} 4 = 3 + 1 \\ 2 = 2 \\ \hline 4.2 = (3+1).2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a.c = b.d \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 6 = 2.3 \\ 2 = 2 \\ \hline \left.\begin{array}{r} 6:2 \\ \frac{6}{2} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2.3 : 2 \\ \frac{2.3}{2} \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{array}$$

Achter Grundsatz: Wenn man gleiche Größen mit gleichen Größen vervielfacht, so entstehen gleiche Größen; oder: wenn die Faktoren zweier Produkte gleich sind, so sind auch die Produkte einander gleich; oder: Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.

Neunter Grundsatz: Wenn gleiche Größen durch gleiche Größen getheilt werden, so entstehen gleiche Größen; oder: wenn die Dividenden und Divisoren einander gleich sind, so sind auch die Quotienten einander gleich; oder: Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.

10. Zusatz 1.

Wenn wir die sogenannten 4 Species (Grund-Rechnungsarten oder Grundoperationen des Rechnens) auf gleiche Größen anwenden, so erhalten wir, wie gezeigt worden ist, folgende 4 Grundsätze:

1. Gleiches zu Gleichem giebt gleiche Summen;
2. Gleiches von Gleichem giebt gleiche Reste;
3. Gleiches mit Gleichem (multiplicirt) giebt gleiche Produkte;
4. Gleiches durch Gleiches (dividirt) giebt gleiche Quotienten.

Diese 4 mathematischen Grundsätze sind Anwendungen des allgemeinen (logischen) Grundsatzes:

Digitized by Google

Wenn man gleiche Operationen (Verrichtungen) an oder mit gleichen Gegenständen vornimmt, so entstehen gleiche Resultate.

11. Zusatz 2.

Wenden wir die 4 Species auf jeden der 9 Fälle des zweiten Zusatzes zu dem fünften Grundsatze an, so erhalten wir folgende Resultate:

1. $a = b$, $c = d$

1. $a + c = b + d$ (6 G.)
2. $a - c = b - d$ (7 G.)
3. $a.c = b.d$ (8 G.)
4. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (9 G.)

2. $a = b$, $c < d$

1. $a + c < b + d$
2. $a - c > b - d$
3. $a.c < b.d$
4. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

3. $a = b$, $c > d$

1. $a + c > b + d$
2. $a - c < b - d$
3. $a.c > b.d$
4. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

4. $a > b$, $c = d$

1. $a + c > b + d$
2. $a - c > b - d$
3. $a.c > b.d$
4. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

5. $a > b$, $c > d$

1. $a + c > b + d$
2. $a - c \gtreqless b - d$
3. $a.c > b.d$
4. $\frac{a}{c} \gtreqless \frac{b}{d}$

6. $a > b$, $c < d$

1. $a + c \gtreqless b + d$
2. $a - c > b - d$
3. $a.c \gtreqless b.d$
4. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

7. $a < b$, $c = d$

1. $a + c < b + d$
2. $a - c < b - d$
3. $a.c < b.d$
4. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

8. $a < b$, $c > d$

1. $a + c \gtreqless b + d$
2. $a - c < b - d$
3. $a.c \gtreqless b.d$
4. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

Digitized by Google

9. $\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}$

---

1. $a + c < b + d$

2. $a - c \gtreqless b - d$

3. $a.c < b.d$

4. $\frac{a}{c} \gtreqless \frac{b}{d}$

In dem Falle 5, 2 und 4 — 6, 1 und 3 — 8, 1 und 4 — 9, 2 und 4 folgt aus den Vordersätzen nichts, wie leicht zu findende Beispiele anschaulich machen. — Die neuen Sätze, welche wir in diesen allgemeinen Beispielen (Schematen) angewandt haben, heißen:

1. Ungleiches zu Gleichem und Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt ungleiche Summen;
1. Ungleiches von Gleichem und Gleiches von Ungleichem giebt ungleiche Reste;
3. Ungleiches mit Gleichem und Gleiches mit Ungleichem multiplicirt, giebt ungleiche Produkte;
4. Ungleiches durch Gleiches und Gleiches durch Ungleiches dividirt, giebt ungleiche Quotienten.

Werden gleiche Operationen mit ungleichen Größenpaaren vorgenommen, so läßt sich im Allgemeinen gar nicht bestimmen, ob dieß zu gleichen oder zu ungleichen Resultaten führt. Bei einzelnen (concreten) Fällen läßt sich dieß bstimmen, nicht aber aus allgemeinen (logischen) Gründen. Bei einigen Operationen ist dieß auch dann der Fall, wenn man weiß, auf welcher Seite die größeren und kleineren Größen sich befinden. Wir finden dann folgende Sätze:

1. Gleiche Größen zu ungleichen, oder ungleiche zu gleichen addirt, giebt ungleiche Summen; die größere Summe ist auf der Seite, auf welcher sich der größere Summand oder die größeren Summanden befinden.
2. Gleiche Größen von ungleichen Größen abgezogen, giebt ungleiche Reste; der größere Rest findet sich auf der Seite, auf welcher der größere Minuend steht.
3. Ungleiche Größen von gleichen abgezogen, giebt ungleiche Reste; der größere Rest findet sich auf der Seite, auf welcher der kleinere Subtrahend steht.
4. Gleiche Größen mit ungleichen Größen, und ungleiche mit gleichen multiplicirt, giebt ungleiche Produkte; das größere ist da, wo der größere Faktor steht.

Digitized by Google

5. Gleiche Größen durch ungleiche dividirt, giebt ungleiche Quotienten; den größeren Quotienten findet man auf der Seite, auf welcher sich der kleinere Divisor befindet.
6. Ungleiche Größen durch gleiche dividirt, giebt ungleiche Quotienten; den größeren Quotienten findet man auf der Seite, auf welcher sich der größere Dividend befindet.

12. Zusatz 3.

Dem ganz ausgeführten Beweise liegt der logische Satz zu Grunde: von zweien einander widersprechenden Merkmalen muß jedem Gegenstande nothwendig eins zukommen; aber auch nur eins. Widersprechende Merkmale sind solche, welche einander gegenseitig aufheben, wie z. B. gut und nicht-gut (böse), reich und nicht-reich (arm), schnell und nicht-schnell, gerade und krumm u. s. w. Dieser logische Grundsatz behauptet z. B., daß jeder Gegenstand entweder gut oder nicht-gut, schnell oder nicht-schnell, allgemein a oder nicht-a sein müsse. Wenden wir dieß auf irgend 2 Gegenstände in Bezug auf ihre Größe an, so sagt dieser Satz: daß jede zwei Größen entweder einander gleich oder einander nicht-gleich, daß z. B. $a + c =$, oder nicht gleich $b + d$ seien. Kann nun bewiesen werden, daß die Annahme, $a + c$ sei $= b + d$, falsch ist, so ist damit der Beweis geliefert, daß $a + c$ nicht gleich $b + d$ sei. Für diesen Fall müssen wir die beiden Unterscheidungen machen, daß alsdann $a + c$ entweder größer oder kleiner ist als $b + d$.

Da diese Art der Beweisführung interessant und belehrend, so will ich auf dieselbe Art noch Folgendes ausführen.

Behauptung. Wenn $a = b$, so ist auch $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$.

Beweis. $\frac{1}{2}a$ ist entweder $=$, oder $>$, oder $< \frac{1}{2}b$. Kann nun nachgewiesen werden, daß 2 dieser Fälle falsch seien, so ist zugleich bewiesen, daß der dritte Fall wahr sei.

Angenommen daher: $\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}b$. Ich setze diese Größen noch einmal hin $\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}b$ und addire. Dann muß auch

$$\underbrace{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a}_{a} > \underbrace{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b}_{b},$$

also mußte auch $a > b$ sein. Dieß folgt nothwendig aus der Annahme, daß $\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}b$ sei. Nach der Annahme aber ist es falsch, daß $a > b$ sei. Ein Satz aber, aus welchem ein falscher Satz folgt, ist nothwendig selbst falsch. Also ist es falsch, daß $\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}b$.

Angenommen ferner: $\frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b$,
$\frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b$

$$\underbrace{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a}_{a} < \underbrace{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b}_{b}$$

Digitized by Google

also wäre $a < b$. Dieß widerspricht aber der Bedingung: $a = b$; folglich ist es falsch, daß $a < b$, also auch falsch: $\frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b$.

Da nun von drei Fällen $\frac{1}{2}a \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{1}{2}b$ einer statt finden muß, die beiden letzteren aber falsch sind, so muß es wahr sein: $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$. —

Satz. Wenn $a = b$
und $c > d$
so ist $a - c < b - d$.

Beweis. $a - c \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} b - d$.

Angenommen 1) $a - c = b - d$

$$\frac{\begin{matrix} a = b \text{ (Beding.)} \\ a - c - a \;\Big|\; = \;\Big|\; b - d - b \quad \text{(G. 7.)} \\ -c \qquad\quad -d \end{matrix}}{c = d}$$

Also wäre $c = d$. Nach der Voraussetzung ist aber $c > d$; folglich kann c nicht $= d$, also auch der Satz nicht wahr sein, aus welchem folgt: $c = d$, d. h. $a - c$ nicht $= b - d$.

Angenommen 2) $a - c > b - d$

$$\frac{\begin{matrix} a = b \text{ (Beding.)} \\ a - c - a \;\Big|\; > \;\Big|\; b - d - b \\ -c \qquad\quad -d \end{matrix}}{+c \quad < \quad +d}$$

, denn das negativ Größere ist das positiv Kleinere.

Nach der Bedingung ist aber $c > d$, also falsch, daß $c < d$, folglich auch falsch, daß $a - c > b - d$.

Da nun $a - c \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} b - d$, und, wie bewiesen worden ist, $a - c$ weder $=$ noch $>$ als $b - d$, so muß $a - c < b - d$ sein. —

Die übrigen Sätze werden ganz auf dieselbe Art bewiesen.

13. Zusatz 4.

1. Die in §. 21 enthaltenen Grundsätze sind im Vorstehenden so deutlich ausgesprochen, daß ihre Wiederholung hier überflüssig sein würde.
2. Grundsätze heißen diese Sätze, theils deßwegen, weil durch sie alle übrigen Sätze begründet werden, theils auch deßwegen, weil sie selbst sich nicht auf andere Sätze stützen, weil sie also den Grund (die Basis) des ganzen Gebäudes ausmachen.

Digitized by Google

3. Ein Satz überhaupt ist der Ausspruch eines Urtheils. Ein in Worte gefaßtes Urtheil heißt ein Satz.

4. Ein Grundsatz (Axiom — Mehrzahl: Axiome) ist ein Satz, auf welchen andere Sätze sich stützen und dessen Wahrheit so einfach und einleuchtend ist, daß er weder eines Beweises bedürftig noch fähig ist.

5. Ein Zusatz ist ein solcher Satz, welcher durch einen ganz einfachen Schluß aus einem andern abgeleitet werden kann.

7. Lehrsätze (Theoreme) heißen diejenigen (theoretischen — Erkenntniß-) Sätze, welche eine Behauptung enthalten, welche nicht unmittelbar gewiß, sondern bewiesen werden muß.

Der Lehrsatz hat mit dem Grundsatz das gemeinschaftliche Merkmal, daß er, wie dieser, eine Behauptung enthält, welche erkannt oder eingesehen werden soll. Er unterscheidet sich aber dadurch vom Grundsatze, daß er eines Beweises fähig und bedürftig ist, was bei'm Grundsatze nicht der Fall ist.

Beide verlangen aber keine Handlung; sie sind nicht praktische (werkliche), sondern theoretische Sätze, Sätze für das Erkenntnißvermögen.

7. Für die Ableitung, Begründung oder Nachweisung der Wahrheit eines Satzes haben wir in der deutschen Sprache den Ausdruck: Beweis — beweisen (demonstriren). Beweisen heißt: die Wahrheit eines Satzes aus einem oder mehreren anderen, für wahr erkannten Sätzen ableiten. Dieses geschieht theils unmittelbar, theils mittelbar, theils durch Folgerungen, theils durch Schlüsse. Die Beweise bestehen aus einem oder mehreren Schlüssen. Zusätze werden in der Regel gefolgert, d. h. unmittelbar abgeleitet. Die Sätze, aus welchen ein Satz abgeleitet wird, heißen seine Gründe. Die letzten, tiefstliegenden Gründe für die Wahrheit einer Behauptung sind Grundsätze.

Es giebt vollständige und unvollständige Beweise, je nachdem die für die Wahrheit des bewiesenen Satzes aufgestellten Gründe allgemeine oder nicht allgemeine Gültigkeit haben. Aecht mathematische Beweise sind immer vollständige Beweise.

8. Eine Erklärung (Definition) ist ein Satz, welcher die wesentlichen Merkmale eines Begriffs aufstellt.

9. Eine Forderung (Postulat) ist ein praktischer Satz, welcher verlangt, daß etwas ausgeführt werden solle, von so leichter Art, daß jeder gesunde Menschenverstand es leisten, daß es von jedem geregelten Kopfe gefordert werden kann.

Forderungen sind z. B. die Sätze: eine gerade Linie zu ziehen, oder gezogen zu denken — eine gerade Linie zu verlängern, zu verkürzen, oder verlängert, verkürzt zu denken — mit einem bestimmten Halbmesser einen Kreis zu ziehen u. s. w.

Digitized by Google

10. u. 11. Ein Satz, welcher eine Handlung (wenn auch nur in Gedanken) verlangt, welche nicht gerade unmittelbar von jedem Verstande gefordert werden kann, heißt eine Aufgabe (Problem). Die Aufgabe verlangt eine größere Anstrengung, als die Forderung. Sie beruht auf anderen Wahrheiten, auf Forderungen und Grundsätzen. Der Aufgabe Genüge leisten heißt die Aufgabe auflösen, angeben, durch welche Mittel oder auf welchem Wege dasjenige geschieht, was die Aufgabe verlangt. Wird nachgewiesen, daß durch die angegebenen Mittel oder durch den vorgeschriebenen Weg die Aufgabe wirklich aufgelöset wird, so hat man die Richtigkeit der Auflösung bewiesen. Jede Aufgabe verlangt also Auflösung und Beweis der Richtigkeit der Auflösung.

In der Geometrie hat man es mit Gegenständen im Raume zu thun. Die geometrische Auflösung giebt daher an, wie eine Aufgabe im Raume aufgelöset wird. Dieß nennt man construiren. Die Construction einer Aufgabe besteht darin, daß angegeben wird, welche Linien gezogen, welche Winkel gebildet werden müssen u. s. w., um die Aufgabe aufzulösen. Ueberhaupt nennt man die Angabe der im Raume zu vollziehenden Operationen Construction. Werden z. B. zur Beweisführung eines Lehrsatzes Linien gezogen, so heißen diese auch Constructionslinien.

12. Unter Voraussetzung (Hypothesis) versteht man diejenigen Sätze, welche als wahr angenommen werden. Diese werden begreiflicher Weise nicht bewiesen, sondern auf sie stützt sich der Beweis der Wahrheit der aus ihnen abgeleiteten Sätze. Jede beweisbare Behauptung gilt nur unter einer gewissen Voraussetzung. Behaupte ich z. B. von einem Dreiecke, daß die an einer Seite desselben liegenden Winkel einander gleich seien, so setze ich voraus, daß das △ gleichschenklig sei, und daß die gleichen Winkel den gleichen Schenkeln gegenüber liegen. Unter der Voraussetzung, daß $a = b$ und $b = c$ sei, behaupte ich, daß auch $a = c$ sei. Dieses gilt nur unter der angegebenen Voraussetzung, nicht auch ohne die Voraussetzung. Hebe ich dieselbe auf, so fällt auch die Behauptung weg.

14. Zusatz 5.

Die meisten Wörter, welche Zeichen für Begriffe sind, lassen sich auf mehrfache Art erklären. Man unterscheidet besonders die Erklärung des Wortes von der Erklärung der Sache. Wird bloß angegeben, was man sich unter einem Worte zu denken habe, welcher Gegenstand durch das Wort bezeichnet werden solle, so ist dieß die Worterklärung; wird aber das Wesen des Begriffs, welcher in dem Worte liegt, durch Merkmale angegeben, so hat man eine Sacherklärung. Da man das Wesen eines Gegenstandes

Digitized by Google

vorzüglich dadurch klar einsiehet, wenn man weiß, wie derselbe entsteht, so werden diejenigen Sacherklärungen, welche die Entstehung des Gegenstandes nachweisen, für die vollkommensten gehalten. Man nennt sie genetische (die Entstehung des Begriffs erklärende) Definitionen. In der Geometrie strebt man überall nach genetischen Definitionen. Und wenn man auch Anfangs, damit man sich darüber verständige, wovon die Rede ist, Worterklärungen gebraucht, so muß doch in der Folge die Richtigkeit der, einstweilen angenommenen, Vorstellung anschaulich nachgewiesen, d. h. eine genetische Sacherklärung gegeben werden.

Hiernach werden wir leicht beurtheilen können, welche der folgenden Erklärungen zu den Wort- oder Sacherklärungen gehören.

1. Der Satz: »ein gleichschenkliges △ ist ein solches, das zwei gleiche Seiten hat« ist eine Worterklärung. Er sagt mir nur, was ich unter dem Ausdruck »gleichschenkliges △« zu verstehen habe, ohne die Wirklichkeit und Nothwendigkeit desselben, ohne die Entstehung desselben nachzuweisen.

2. Sage ich aber: »eine Figur, welche dadurch entsteht, daß man die beiden gleich langen Schenkel eines Winkels durch eine gerade Linie verbindet, heißt ein gleichschenkliges △«, so habe ich eine genetische Definition des Begriffes gegeben; denn die Entstehung des gleichschenkligen △ ist nun nachgewiesen.

3. Diese Definition ist eine Worterklärung.

4. Eine Sacherklärung. Die vollständigen Sacherklärungen der Geometrie sind immer genetische.

5 u. 6 enthalten Worterklärungen.

7 stellt die Sacherklärung des Begriffes »Kreis« auf.

8 enthält die Wort=,

9 die Sacherklärung einer in den Kreis beschriebenen Figur.

10. — Worterklärung.

11. — Deßgleichen. Hier ist bloß gesagt, was ein Rechteck nicht sei; die Definition enthält also nur Verneinungen (Negationen). Dergleichen Erklärungen sind verwerflich und nur da zuzulassen, wo man keine positiven Merkmale finden kann, welches in der Mathematik nirgends der Fall ist.

12. Vorstehende Bemerkung gilt auch von der Definition: »eine gerade Linie ist eine solche, welche nicht krumm ist.« Wenn mir nichts weiter von der geraden Linie bekannt ist, so weiß ich bloß, was sie nicht ist.

13. Worterklärung. Diese Definition läßt es ganz unentschieden, ob es regelmäßige Vierecke giebt. Solches würde die Sacherklärung leisten.

14. Deßgleichen.

Digitized by Google

15. Sacherklärung. Die Entstehung des Fünfecks aus dem Viereck ist nachgewiesen. Die Kenntniß des Vierecks wird hier freilich vorausgesetzt.
16. Worterklärung des Begriffes »Geometrie.«

§. 22. Logische Grundsätze und deren Anwendung auf Geometrie.

1. Alle mathematischen Gegenstände, welche mit einander verglichen werden, oder deren Größenverhältniß bestimmt werden soll, müssen gleichartig sein. Sind die mit einander zu vergleichenden Größen nicht gleichartige Größen, so können sie in gar kein Verhältniß zu einander gebracht werden. Linien mißt und vergleicht man nicht mit Flächen und Körpern, sondern mit Linien. Da alle Gegenstände wenigstens ein Merkmal mit einander gemein haben, indem in allen wenigstens das Merkmal »Ding« oder »Wesen« liegt, so können auch alle mit allen in Beziehung gebracht werden; nur muß man alsdann von ihren übrigen Verschiedenheiten abstrahiren, einzig die Gleichartigkeit derselben festhaltend. So z. B. kann ich von dem Verhältnisse einer Waare zu einer gewissen Geldsumme sprechen, wenn ich beide in Berücksichtigung ihres Werthes als Dinge von einerlei Art ansehe. Daher wird auch von dem Verhältnisse eines Dreiecks zu einem Viereck u. s. w. gesprochen, indem von dem Verhältniß der Größe ihrer Flächen die Rede ist. Begreiflicher Weise können auch nur solche Größen in eine Summe gebracht werden, welche von einer Größe meßbar sind. Linien addirt und subtrahirt man nur zu und von Linien; eine Fläche kann als Fläche nur mit andern Flächen-, nicht mit Liniengrößea in eine Summe gebracht werden. Da in manchen Lehrbüchern der Geometrie von der Multiplication einer Linie mit einer andern u. s. w. die Rede ist, so mußte hier die Frage aufgeworfen werden, ob Linien mit Linien, Flächen mit Flächen u. s. w. mit einander multiplicirt werden können. Allein in der Zahlenlehre wird schon gezeigt, daß nicht zwei benannte Größen mit einander vervielfacht werden können, daß von 2 Factoren wenigstens einer als reine Zahl angesehen werden muß. Welcher Art sollte auch das Produkt sein, wenn man eine Linie mit einer Linie multipliciren wollte, Linie oder Fläche, oder was für ein Ding? Da das Produkt zweier Faktoren dem einen benannten Faktor gleichartig ist, so entsteht durch Multiplication einer Linie mit einer reinen Zahl wieder eine Linie

u. ſ. w. — Umgekehrt darf man aus der Beſchaffenheit, daß 2 Größen in Verhältniß gebracht worden ſind, oder gebracht werden können, auf ihre Gleichartigkeit in der Beziehung, in welcher ſie in Verhältniß gebracht wurden, ſchließen.

2. Bei jeder Eintheilung eines Begriffes kommt es bekanntlich hauptſächlich darauf an, daß nur nach einem Eintheilungsgrund eingetheilt, daß kein Eintheilungsglied überſehen, oder daß der ganze Umfang des Begriffes angegeben wird, daß die Theilglieder in nebengeordnetem Verhältniß zu einander ſtehen, und daß dieſelben ſich gegenſeitig ausſchließen. Angenommen, dieß ſei geſchehen, und M ſei entweder a, oder b, oder c, d, ſo daß a, b, c und d ſämmtliche, nebengeordnete Theile der Sphäre des Begriffes M angäben, ſo iſt alſo M entweder a, oder b, oder c, oder d, nicht a und b zugleich u. ſ. w., aber nothwendig eins dieſer 4. Wenn daher die Sphäre des Begriffes »Dreieck« in Anſehung der Winkelverſchiedenheit durch das recht-, ſpitz- und ſtumpfwinklige Dreieck erfüllt wird, ſo iſt jedes Ding, das ein Dreieck iſt, nothwendig entweder recht-, oder ſpitz-, oder ſtumpfwinklig, nicht aber recht- und ſpitzwinklig zugleich.

Wenn das Quadrat, das Rechteck, der Rhombus und der Rhomboides alle möglichen Arten der Parallelogramme ſind, ſo gehört jedes Parallelogramm zu einer, aber nur zu einer dieſer Arten. Ferner wenn ein Parallelogramm kein Quadrat iſt, ſo iſt es entweder ein Rechteck, oder ein Rhombus, oder ein Rhomboides. Iſt eine Figur ein Parallelogramm, aber weder ein Quadrat, noch ein Rechteck, ſo iſt ſie entweder ein Rhombus, oder ein Rhomboides. Iſt die Figur ein Parallelogramm, aber weder ein Quadrat, noch ein Rechteck, noch ein Rhombus, ſo iſt ſie nothwendig ein Rhomboides.

Zuſatz 1.

Der Unterſchied des direkten und indirekten Beweiſes liegt nun klar zu Tage. Bediene ich mich jenes, ſo zeige ich, daß ein Gegenſtand wirklich die Merkmale beſitzt, die ich ihm in der Behauptung beigelegt habe; gebrauche ich dieſen, ſo weiſe ich nach, daß er zu einer gewiſſen Klaſſe von Dingen gehört, daß er entweder a, oder b, oder c u. ſ. w. ſein müſſe, aber weder a, noch b ſei, woraus dann folgt, daß er c ſein müſſe.

Angenommen, daß nur auf folgenden Wegen Vermögen erwartet werden könne: entweder durch Erbſchaft, oder durch Fleiß, oder durch Diebſtahl, oder durch die Lotterie. Gelangt nun irgend ein Menſch zu Vermögen, und iſt es bewieſen, daß er daſſelbe weder durch Erbſchaft, noch durch Fleiß, noch durch die Lotterie erworben hat, ſo muß er es geſtohlen haben. Dieß wäre ein indirekter Beweis des geſchehenen Diebſtahls. Hieraus leuchtet ein,

Digitized by Google

daß der direkte Beweis eine größere Anschaulichkeit, wenn auch keine größere Gewißheit hat, als die indirekte Beweisart. Anschaulicher wäre z. B. das Verbrechen des Diebstahls bewiesen, wenn nachgewiesen würde, daß der Dieb auf die und die Weise den Einbruch verübt, sich dieser oder jener Mittel dabei bedient habe u. s. w. Die direkte Beweisart ist daher der indirekten vorzuziehen. Wäre der Beweis zu führen, daß irgend eine Figur ein rechtwinkliges △ sei, so geschähe dieses direkt so, daß aus den Bedingungen abgeleitet würde, daß die Figur 3 Seiten und einen rechten Winkel habe; indirekt so, daß bewiesen würde, die Figur gehöre zu den Dreiecken, sei aber weder spitz-, noch stumpfwinklig.

Zusatz 2.

Den Inhalt dieses Zusatzes wollen wir noch durch ein Beispiel erläutern. Es soll die Lage eines Ortes auf der Erdoberfläche bestimmt werden. Ich weiß, daß der längste Tag eines Ortes auf dem Aequator 12 Stunden, eines Ortes zwischen Aequator und den Polarkreisen mehr als 12 und weniger als 24, eines Ortes auf den Polarkreisen 24, eines Ortes zwischen den Polarkreisen und den Polen länger als 24 Stunden und weniger als 6 Monate, eines Ortes in den Polen 6 Monate währet — 5 Fälle. Kann nun gezeigt werden, daß weder 2, noch 3, noch 4, noch 5 statt findet, weil diese Annahmen auf Widerspruch führen, z. B. auf Verhältnisse, welche mit den mir bekannten Verhältnissen des Ortes nicht übereinstimmen, so muß 1 sein, d. h. der Ort liegt auf dem Aequator.

Bei den apagogischen Beweisen schließen wir aus der Falschheit der Folgen einer Behauptung auf die Falschheit der Behauptung selbst.

Zusatz 3.

Was scheint nun natürlicher zu sein, als aus der Wahrheit der Folgen eines Satzes auf die Wahrheit des Satzes selbst zu schließen?

Beispiele. Angenommener Satz: Alle Figuren sind Dreiecke. Wenn dieß wahr ist, so sind auch einige Figuren Dreiecke. Dieß ist ein wahrer Satz. Darf ich daraus, also aus der Wahrheit des gefolgerten Satzes, auf die Wahrheit des ersten Satzes schließen?

Aus dem Satze: »alle Menschen haben das Herz auf der linken Seite« folgt der Satz, daß auch der Mensch Cajus das Herz auf der linken Seite habe. Darf ich von der Wahrheit dieses gefolgerten Satzes auf die Wahrheit des ersteren schließen?

Aus falschen Sätzen können wahre Sätze abgeleitet werden. Folglich kann aus der Wahrheit der Folgen die Wahrheit des Grundes nicht mit Untrüglichkeit erschlossen werden.

Digitized by Google

Zusatz 4.

1. Ein Satz, welcher aus einem falschen Satze folgt, ist darum nicht nothwendig falsch.
2. Hängt eine Behauptung mit andern Behauptungen so zusammen, daß sie wahr ist, wenn diese wahr sind, und daß sie falsch ist, wenn diese falsch sind, so kann man aus der bekannten Wahrheit oder Falschheit dieser auf die Wahrheit oder Falschheit jener schließen.
3. Aus wahren Sätzen folgen nur wahre Sätze, wenn anders richtig abgeleitet wird. Sind die Gründe wahr, so sind es auch die Folgen.

   Aus der Wahrheit der Gründe schließen wir also auf die Wahrheit der Folgen; aus der Falschheit der Gründe nicht aber auf die Falschheit der Folgen. Aus der Falschheit der Folgen folgt die Falschheit der Gründe, nicht aber aus der Wahrheit der Folgen die Wahrheit der Gründe.
4. Weiter oben ist das Kennzeichen einander widersprechender Merkmale bereits angegeben worden. Es sind solche, welche sich gegenseitig aufheben. Das widersprechende Merkmal von »Dreieckig« ist nicht viereckig und nicht rund, sondern nicht-dreieckig, von Vermögen »Nicht-Vermögen«, von gut »nicht-gut«, von eben »nicht-eben«, von gerade »nicht-gerade«, von Winkel »Nicht-Winkel«, von senkrecht »nicht-senkrecht« u. s. w.

§. 23. Geometrische Urtheile.

Nro. 1 bis 12 führen Beispiele auf über die verschiedenen Arten der Urtheile nach ihren möglichen Formen. Nach der Quantität (dem Umfange) des Urtheils sind sie entweder allgemeine, oder besondere, oder einzelne (1—5); nach der Qualität (Beschaffenheit) bejahende, verneinende, oder beschränkende (verneinende in bejahender Form) (4 — 6); nach der Modalität (dem Verhältniß meines Erkenntnißvermögens zur Wahrheit des Urtheils) problematische oder Möglichkeits- oder Fragenurtheile, assertorische oder Erfahrungsurtheile und apodiktische oder Vernunfturtheile (7—9); nach der Relation (dem Verhältniß des Subjects- und Prädicatbegriffes) kategorische oder Eigenschaftsurtheile, hypothetische oder Bedingungsurtheile und disjunctive oder Theilungsurtheile (10—12). — Wir gehen nun zur Beurtheilung der Wahrheit der folgenden Urtheile über.

13. Alle Dreiecke sind Figuren — ist ein wahrer Satz, dann der Begriff »Dreieck« ist dem Begriffe »Figur« untergeordnet.

Digitized by Google

14. Alles, was Nicht-△ ist, ist eine Figur — falsch. Es müßte sonst z. B. die Linie, welche zu den Nicht-Dreiecken gehört, eine Figur sein.
15. Alle △ sind Nicht-Figuren — falsch; denn alle △ sind Figuren.
16. Was kein △ ist, ist auch keine Figur — falsch; denn Vierecke z. B. sind Nicht-△, und doch Figuren.
17. Kein △ ist eine Figur — falsch, denn jedes △ ist eine Figur.
18. Kein Nicht-△ ist eine Figur — falsch; denn ein Kreis z. B. ist ein Nicht-△; also wäre kein Kreis eine Figur, welches falsch ist.
19. Kein △ ist eine Nicht-Figur — wahr; denn jedes △ ist eine Figur.
20. Kein Nicht-△ ist eine Nicht-Figur — falsch; denn Manches, was Nicht-△ ist, ist auch etwas, was Nicht-Figur ist. Eine Linie z. B. ist ein Nicht-△; eine Länge ist Nicht-Figur; und doch ist die Linie eine Länge.
21. Einige △ sind Figuren — wahr; denn alle △ sind Figuren.
22. Einige Nicht-△ sind Figuren — wahr; denn einige Figuren, welche Nicht-△ sind, z. B. Vierecke, sind Figuren.
23. Einige △ sind Nicht-Figuren — falsch; denn alle △ sind Figuren.
24. Einiges, was nicht △ ist, ist auch nicht Figur — wahr; denn es giebt ja tausend Dinge, die weder Figuren, noch Dreiecke sind.
25. Jede Figur ist ein △ — falsch; denn der Begriff △ ist dem Begriffe Figur untergeordnet. Es giebt viel mehr Figuren als △.
26. Jede Nicht-Figur ist ein △ — falsch; denn was keine Figur ist, ist auch kein △.
27. Jede Figur ist ein Nicht-△ — falsch; denn einige Figuren sind △.
28. Was keine Figur ist, ist auch kein △ — wahr; denn was dem übergeordneten Begriffe entgegen ist, widerspricht auch dem untergeordneten.
29. Keine Figur ist ein △ — falsch; denn einige Figuren sind △.
30. Keine Nicht-Figur ist ein △ — wahr; denn was nicht zu den Figuren gehört, gehört auch nicht zu den △.
31. Keine Figur ist ein Nicht-△ — falsch; manche Figuren, z. B. Vierecke, sind nicht △.
32. Keine Nicht-Figur ist ein Nicht-△ — falsch; denn Manches, was Figur ist, ist doch nicht △.
33. Einige Figuren sind △ — wahr; denn alle △ sind Figuren.

Digitized by Google

34. Einige Nicht-Figuren sind △ falsch; denn was dem übergeordneten Begriffe widerspricht, ist auch dem untergeordneten entgegen.

35. Einige Figuren sind Nicht-△ — wahr; denn Vierecke z. B. sind nicht △.

36. Einige Nicht-Figuren sind Nicht-△ — wahr; denn alle Nicht-Figuren sind Nicht-△.

Anmerkung. Ohne gerade auf §. 23 ganz besonderen Werth zu legen, ist derselbe in der zweiten Auflage doch beibehalten worden, weil er den Schüler nöthigt, allgemeine (abstrakte) Vorstellungen aufzufassen (worin ja der Hauptwerth des Studiums der Philosophie und der Mathematik liegt); dann auch, weil die Kenntniß der verschiedenen Urtheilsformen überhaupt wichtig ist. Wem übrigens die meisten der Sätze von Nro. 13 an zu abstrakt sind, überschlage sie.

§. 24. Schlüsse.

1. Alle Menschen sind sterblich. (Obersatz) } Prämissen.
Ich bin ein Mensch. (Untersatz) }

Folglich bin ich sterblich. (Schluß = Conclusion.)

In jedem △ liegen 3 Winkel.
Diese Figur ist ein △.

Folglich liegen 3 Winkel in derselben.

Allgemein: Alles A ist B.
C ist A.

Also: C ist B.

2. »Wenn diese Figur ein △ ist, so liegen 2 spitze Winkel darin.« Gesetzt, dieser Satz sei der Obersatz eines Schlusses. Der Untersatz kann alsdann eine 4fache Form annehmen, je nachdem er den Grund setzt oder aufhebt, oder die Folge setzt oder aufhebt. Dieses giebt folgende 4 Zusammenstellungen:

a) Wenn diese Figur ein △ ist, so liegen 2 spitze Winkel darin.
Diese Figur ist △.

Folglich liegen in ihr 2 spitze Winkel.

Wir schließen hier nach dem allgemeinen Satze: »wenn der Grund gesetzt ist, so ist auch die Folge gesetzt.«

b) Wenn diese Figur ein △ ist, so liegen 2 spitze Winkel darin.
Diese Figur ist kein △.

. . . . . Aus

diesen beiden Sätzen folgt nichts. Eine Figur braucht kein △ zu sein, damit 2 spitze Winkel darin liegen; es giebt Vierecke, Fünfecke u. s. w., welche 2 spitze Winkel enthalten. Der hier

Digitized by Google

zu Grund liegende Satz heißt: »wenn der Grund aufgehoben wird, so wird darum nicht auch die Folge aufgehoben.« Offenbar darum nicht, weil eine Wahrheit Folge mehrerer Gründe sein kann, oder, weil verschiedene Gründe dieselbe Folge herbeiführen können. Betrachte ich z. B. die Folge: »es wird naß«, so kann dieselbe durch ganz verschiedene Gründe, z. B. durch Regen, Begießen, Ueberschwemmung u. s. w. hervorgebracht sein.

c) Wenn diese Figur ein △ ist, so liegen 2 spitze Winkel darin.
Es liegen in dieser Figur 2 spitze Winkel.

. . . . . Aus

diesen beiden Sätzen folgt auch nichts. Denn, wie gesagt, eine Folge kann aus mehreren verschiedenen Gründen abgeleitet werden. »Wenn die Folge gesetzt ist, so ist darum nicht auch irgend ein einzelner Grund, welcher auch dieselbe Folge herbeiführen kann, gesetzt.«

d) Wenn diese Figur ein △ ist, so liegen 2 spitze Winkel darin.
In dieser Figur liegen nicht 2 spitze Winkel.

Folglich ist sie auch kein △.

Wir schließen hier nach dem allgemeinen gültigen Satze: »wenn die Folge aufgehoben ist, so ist auch der Grund aufgehoben.« Natürlich; denn der Grund führt die Folge nothwendig herbei; wäre also der Grund nicht aufgehoben, so konnte auch die Folge nicht wegfallen. Diese ist aber weggefallen; folglich ist auch der Grund aufgehoben.

Im Vorstehenden sind demnach folgende 4 logische Sätze angewandt:

Wenn der Grund gesetzt ist, so ist auch die Folge gesetzt.
= = = aufgehoben ist, so ist darum die Folge nicht aufgehoben.

Wenn die Folge gesetzt ist, so ist darum der Grund nicht gesetzt.

Wenn die Folge aufgehoben ist, so ist auch der Grund aufgehoben.

Also nur der erste und vierte Fall erlaubt einen sichern Schluß. Allgemein:

Wenn A ist, so ist B.

Nun ist A. | Nun ist B nicht.

Folglich ist auch B. | Folglich ist auch A nicht.

Fassen wir die »Ursache« als bewirkenden Grund, die »Wirkung« als bewirkte Folge auf, so haben wir die beiden Sätze:

Die Ursache führt jedesmal die Wirkung herbei, und: ohne Wirkung fehlt auch die Ursache.

Digitized by Google

Nro. 4 stellet Wahrscheinlichkeitsschlüsse auf. Man schließt in denselben von den meisten Fällen auf alle oder irgend einen vorhandenen. Wenn es öfter der Fall ist, daß M a, als daß M b ist, so schließt man auch in einem einzelnen Falle, daß M wahrscheinlich a sei. Je seltner der Fall eintritt, daß M b ist, desto wahrscheinlicher wird es, daß M in irgend einem unbestimmten Falle a sei. Je größer z. B. die Anzahl der Loose einer Lotterie, und je kleiner die Anzahl der Gewinnste ist, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit des Verlustes. — In vielen Fällen läßt sich der Grad der Wahrscheinlichkeit oder Unwahrscheinlichkeit des Eintreffens eines einzelnen Falles in bestimmten Zahlen ausdrücken. Ein Zahlenlotto besteht z. B. aus 100 Nummern. Ein Spielustiger besetzt eine Ambe. Er fragt nach der Wahrscheinlichkeit des Gewinnens. Hier muß die Zahl der Ambe unter 100 Nummern angegeben werden. Sie ist $= \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens zur Wahrscheinlichkeit des Verlierens $= 1 : 4950$. In diesem Falle ist demnach die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens sehr klein, oder: die Wahrscheinlichkeit des Verlierens groß.

Begreiflicher Weise geben die Schlüsse für eine Behauptung, für welche mehr Gründe sprechen als gegen sie bekannt sind, keine untrügliche Gewißheit.

Nro. 5 enthält Beispiele der allgemeinen Beweisart, welche von allen Theilen der Sphäre eines Begriffs eine Behauptung sicherstellt und dann den sicheren Schluß macht, daß dieselbe Behauptung darum auch von dem Begriffe überhaupt gelte.

Nro. 6 stellt 2 Schlüsse auf, von welchen der erste der Schlußweise nach der Analogie (Aehnlichkeit) der zweite der Schlußweise nach der Induction angehört. Die Schlüsse nach der Analogie verfahren nach folgendem Gedanken. Wenn mehrere Gegenstände in vielen Merkmalen zusammenstimmen, so werden sie auch in allen übrigen Beziehungen übereinkommen. Ich habe z. B. zwei Blumengewächse vor mir stehen. Beide haben eine keilförmige Wurzel, viereckigen Stengel, lancettförmige Blätter, 6 Staubfäden, eine doldenartige Blumenkrone u. s. w. Nun weiß ich, daß das eine Blumengewächs giftig ist. Daraus schließe ich, daß auch das andere giftig sein werde. Dieß ist ein Schluß nach der Aehnlichkeit (Analogie). Wie wenig zuverläßig dergleichen Schlüsse sind, springt in die Augen. Doch wächst die Zuverläßigkeit (die Sache gewinnt mehr Wahrscheinlichkeit) mit der Anzahl der gleichen Merkmale.

Den Schlüssen nach der Analogie sind die Schlüsse nach

Digitized by Google

der Induction ähnlich. Ihnen liegt folgender Gedanke zu Grund. Wenn mehrere Gegenstände einer Art unter einem gewissen Gesetze stehen, so gilt dieses Gesetz für alle Gegenstände derselben Art. Außer dem im §. angeführten Beispiele noch folgende.

Wenn ich weiß, daß, wenn sich in demselben Punkte:

2 g. L. durchschneiden, 2.2 = 4 Winkel entstehen,
3 = = 2.3 = 6 = =
4 = = 2.4 = 8 = =, und ich nun

aus diesen einzelnen Beispielen den Schluß ziehe, daß, wenn sich irgend eine beliebige Anzahl gerader Linien in demselben Punkt schneidet, die Anzahl der dadurch entstehenden Winkel doppelt so groß sei als die Zahl der Linien, so habe ich aus der Wahrheit einiger Fälle auf die Wahrheit der allgemeinen Regel, folglich inductorisch geschlossen.

Angenommen, daß in einer gewissen Gegend mehrere oder viele aus Nordwest kommende Gewitter Schlossen bringen. Wer daraus den Schluß ziehen wollte, daß jedes mit Nordwest-Wind aufsteigende Gewitter Schlossen erzeugen werde, hätte einen Schluß nach der Induction gemacht.

Die Gewißheit der inductorischen Schlüsse wächst mit der Anzahl der untersuchten Fälle, in welchen sich das Gesetz bestätigt hat. Es giebt vollständige und unvollständige Inductionen. Die angeführten Beispiele waren Beispiele der ersten Art. Ein vollständig-inductorischer Schluß entsteht dadurch, daß nachgewiesen wird, daß, wenn irgend ein Gesetz für einen Fall gelte, es nothwendig auch für den nächstfolgenden Geltung habe. Wird nun gezeigt, daß es wirklich für einen Fall gilt, so gilt es zufolge des Beweises auch für den nächst folgenden, u. s. w., folglich für alle Fälle. Die inductorischen Beweise dieser Art haben ganz allgemeine Gültigkeit.

§. 25. Theile jedes Lehrsatzes und Umkehrung der Sätze.

Da wir, wie unter 1 und 2 gezeigt worden ist, in jedem Lehrsatze einen Gegenstand finden, von welchem eine Behauptung oder eine Aussage ausgesprochen, welcher Gegenstand in der Regel in einer gewissen (ausgesprochenen oder versteckten) Beziehung gedacht wird, so unterscheiden wir in dem Lehrsatze die 3 im §. angegebenen Theile des Lehrsatzes. Es ist dienlich, diese 3 Gegenstände in den Lehrsätzen genau von einander zu unterscheiden und anzugeben. Beispiele:

3. »In jedem geradlinigen △ sind zwei Seiten größer als die

Digitized by Google

dritte.« Gegenstand: △; Beziehung: geradliniges △ Aussage: 2 Seiten sind größer als die dritte. Wollte man den Satz hypothetisch ausdrücken, so hieße er: Wenn ein △ geradlinig ist, so sind je 2 Seiten desselben größer als die dritte.

»Nebenwinkel sind zusammen = 2 R.« Gegenstand: Winkel; Gesichtspunkt: Nebenwinkel; Aussage: sie sind = 2 R.

Anderer Ausdruck: wenn 2 Winkel Nebenwinkel sind, so sind sie zusammen zweien rechten Winkeln gleich.

»Wenn die Sonne über den Horizont heraufsteigt, so wird es Tag.« Gegenstand: die Sonne; Beziehung: aufsteigend über den Horizont; Aussage: es wird Tag.

4. Die bisherigen Zergliederungen sind nothwendig, um Sätze mit Sicherheit umkehren zu können, wie es in der Mathematik häufig vorkommt. Wer die Logik kennt, wird einsehen, daß nicht die ganze Lehre von der Umkehrung der Sätze hier vorkommen kann. Nur Einiges von dieser wichtigen Lehre, was in besonderer Beziehung zur Behandlung geometrischer Sätze steht und im Allgemeinen das Nachdenken zu schärfen geeignet ist, folgt hier. Der Nutzen des hypothetischen Ausdrucks der Sätze wird zugleich klar werden.

»In jedem geradlinigen △ sind 2 Seiten größer als die dritte.« Bedingungsweise ausgedrückt: wenn ein △ geradlinig ist, so sind u. s. w.

Umkehrung: wenn in einem △ je 2 Seiten größer sind als die dritte, so ist es ein geradliniges △.

»Nebenwinkel sind zusammen = 2 R.« Hypothetisch ausgedrückt: wenn 2 Winkel Nebenwinkel sind, so beträgt ihre Größe 2 R. Umkehrung: wenn 2 Winkel zusammen = 2 R sind, so können sie als Nebenwinkel an einander gelegt werden.

»Wenn die Sonne über den Horizont steigt, so wird es Tag.« Umkehrung: wenn es Tag wird, so steigt die Sonne über den Horizont.

Aus diesen Beispielen wirst du dir die unter Nro. 4 über die Bildung der Conversen der Sätze aufgestellte Regel abstrahiren.

5. 1. »Ein △ hat 3 Seiten.« Converse: wenn eine Figur 3 Seiten hat, so ist sie ein △.
   2. Wenn eine Figur ein Quadrat ist, so hat sie 4 gleiche Seiten und 4 gleiche Winkel.
   3. Wenn die Winkel, an einer Seite eines △ liegend, einander gleich sind, so ist das △ gleichschenklig.
   4. »Alle Blumen sind Pflanzen.« Umkehrung: einige (alle?) Pflanzen sind Blumen.

Digitized by Google

5. »Alle Menschen sind sterblich.« Umkehrung: einige Sterblichen sind Menschen.
6. Wenn eine Figur eine gerade Linie zur Gränze hat, so kann sie kein Kreis sein.
7. »Der Punkt hat keine Ausdehnung.« Wenn kein (räumliches — in dem Raum gedachtes) Ding keine Ausdehnung hat, so ist das Gedachte ein Punkt.
8. Einige Figuren sind Dreiecke.
9. Einige Figuren sind rechtwinklige △.
10. Wenn eine Figur ein Viereck ist, so ist sie kein △.
11. Eine begränzte Fläche ist eine Figur.
12. Ein Winkel ist die Neigung zweier sich treffenden Linien gegen einander.
13. Einige gleichseitige Gegenstände sind △.
14. Einige Figuren, welche nicht Parallelogramme sind, sind doch Vierecke.
15. Wenn ein Merkmal, welches einem Gegenstande beigelegt wird, von mehreren Bedingungen abhängig ist, so darf nicht geschlossen werden, daß, wenn der Gegenstand mit dem Merkmale versehen sei, auch die Bedingungen vorhanden seien. Beispiel:

    »Wenn zwei gleiche Faktoren mit einander multiplicirt werden, so entsteht eine Quadratzahl.« Wollte ich hier umgekehrt schließen: wenn eine Quadratzahl entsteht, so sind 2 gleiche Faktoren mit einander multiplicirt worden, so hätte ich einen falschen Satz aufgestellt. Darum muß bei der Umkehrung der Sätze Vorsicht angewandt werden. Mehr über diesen Gegenstand lehrt die Logik.
16. a) Wenn zwei g. L. von einer dritten g. L. durchschnitten werden und die Gegenwinkel gleich sind, so sind jene beiden Linien parallel.

    Dieselbe Aussage gilt wenn

    b) die Wechselwinkel, und

    c) die inneren Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie gleich 2 R sind.

§. 26. Aufgabe und Beweis.

1. Die »Aufgabe« ist, zufolge der oben mitgetheilten Auseinandersetzung, ein praktischer Satz; denn sie verlangt eine, wenn auch nur in Gedanken zu vollziehende, Handlung.

Digitized by Google

2. Einer Aufgabe ist Genüge geleistet, wenn die Auflösung angereihet und der Beweis der Richtigkeit der gegebenen Auflösung beigefügt worden ist.

3. a) Da es sehr viele der Form und Größe nach verschiedene rechtwinklige Dreiecke giebt; da also sehr viele (unendlich viele) ganz verschiedene △ der Aufgabe, welche die Construction eines rechtwinkligen △ verlangt, Genüge leisten: so gehört diese Aufgabe zu den unbestimmten.

   b) Da jedes der Zahlenpaare 1 und 11, 2 und 10, 3 und 9, 4 und 8, 5 und 7, 6 und 6 die Summe 12 ausmacht, so läßt die zweite Aufgabe der dritten Nummer 6 verschiedene Auflösungen zu. Die Aufgabe ist folglich unbestimmt.

   c) Ueber einer gegebenen g. L. können unzählig viele, der Form und Größe nach verschiedene, Rechtecke beschrieben werden.

   d) Auch mehrere Auflösungen leisten der Aufgabe Genüge, welche verlangt, ein Parallelogramm zu beschreiben, dessen an einander liegende Seiten sich = 1 : 2 verhalten.

   Die beiden Aufgaben sind also auch unbestimmt.

   Eine Aufgabe heißt unbestimmt, wenn mehrere unter einander verschiedene Größen den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Bestimmt heißen diejenigen Aufgaben, deren Bedingungen nur durch eine Größe erfüllt werden.

4. Bestimmte Aufgaben sind z. B. folgende:

   2 ganze Zahlen anzugeben, deren Summe = 12, und deren Unterschied = 4 ist. — Ueber einer geraden Linie ein Quadrat zu beschreiben. — Ein △ zu construiren, von welchem 2 Seiten nebst dem dazwischen liegenden Winkel gegeben ist — u. s. w.

   Unbestimmte Aufgaben z. B.:

   Auf einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten. — Ein Parallelogramm in zwei gleiche Theile zu theilen. — Ein Viereck in ein △ zu verwandeln — u. s. w.

5. Alle Seiten einer Raute sind einander gleich. Und in jedem geradlinigen △ sind je 2 Seiten größer als die dritte.

   Daher giebt es keine Raute, deren Seiten sich = 1 : 2 zu einander verhalten, und kein geradliniges △, in welchem eine Seite größer als die beiden andern zusammen wäre. Die beiden aufgestellten Aufgaben können daher gar nicht aufgelöset werden, weil die Bedingungen der Aufgabe dem Wesen der Gegenstände, an welchen diese Bedingungen erfüllt werden sollen, geradezu widersprechen. Solche

Digitized by Google

Aufgaben heißen unmögliche. Eigentlich ist nur die Auflösung unmöglich.

6. »Beweisen« heißt die Wahrheit oder Falschheit eines Urtheils aus der Wahrheit oder Falschheit eines oder mehrerer Urtheile ableiten; oder: aus der Wahrheit oder Falschheit eines oder mehrerer Urtheile von größerem Umfange die Wahrheit oder Falschheit eines Urtheils von kleinerem Umfange (besonderer Urtheile aus allgemeinen, einzelner und besonderer aus besonderen) nachweisen.

7. Jeder Beweis besteht aus einem oder mehreren Schlüssen. Folgt die Wahrheit eines Urtheils unmittelbar aus einem andern Urtheile, ohne Vermittelung eines andern, so wird dasselbe gefolgert.

8. Die Wahrheit, daß Scheitelwinkel einander gleich sind, folgt aus den Sätzen:

Nebenwinkel sind zusammen = 2 R — wenn 2 Größen derselben dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich — Gleiches von Gleichem abgezogen läßt Gleiches übrig.

9. Zum Beweise des Satzes, daß alle Winkel um denselben Punkt in einer Ebene = 4 R sind, dienen diese Sätze:

Nebenwinkel sind zusammen = 2 R — Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches.

16. Beweisen heißt, wie gesagt, ein Urtheil von einem oder mehreren andern ableiten. Jedes bewiesene Urtheil wird also auf andere Urtheile gestützt, deren Wahrheit bereits feststeht. Fragt man nun weiter nach der Begründung dieser feststehenden Urtheile, so gelangen wir zu Urtheilen, von welchen jene abgeleitet wurden. So weis't jeder bewiesene Satz auf vorhergehende hin, diese wiederum auf frühere u. s. w. u. s. w. Käme man bei diesem rückwärts schreitenden Gange auf eine oder mehrere letzte Urtheile, welche nicht weiter bewiesen werden, so setzte jeder Beweis eine endlose Reihe von Urtheilen voraus, die folglich nie zu übersehen wäre. Allein so ist es nicht; sondern wir gelangen zu Sätzen, deren Wahrheit so einfach und einleuchtend ist, daß sie nicht weiter bewiesen (abgeleitet) werden können, und nicht bewiesen zu werden brauchen. Dieses sind denn im eigentlichen Sinne des Wortes Urtheile.

11. Daraus folgt, daß nicht alle Wahrheiten bewiesen werden können. Gerade die einfachsten Wahrheiten sind keiner Ableitung fähig. Ihre Gewißheit ist keine mittelbare, sondern eine unmittelbare; sie sind ursprünglich im Bewußtsein des Menschen gewiß, und durch sie werden erst andere Wahrheiten festgestellt. Es giebt viele unbeweisbare Sätze, deren Gewißheit dadurch keineswegs schwankend wird. Im Gegentheil

Digitized by Google

kann man theilweise von ihnen behaupten, daß sie den höchsten Grad der Gewißheit an sich tragen. Ueberhaupt haben die Beweise in der Regel nicht den Zweck, bezweifelte Sätze durch unbezweifelte zu befestigen; sondern man will durch den Beweis den Zusammenhang des bereits gewissen Satzes mit andern Sätzen (wissenschaftlich) nachweisen. Man will durch den Beweis eine systematische Verbindung unter die einzelnen Sätze bringen. Wer sich z. B. anschickt zu beweisen, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen △ gleich sind, will sich dadurch nicht erst von der etwa bezweifelten Wahrheit der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie überzeugen. Wer das gleichschenklige △ auch nur durch Anschauung kennt, zweifelt gar nicht an der Wahrheit dieses Satzes. Aber er will sich über dieselbe verständigen, die anschauliche Wahrheit auf Begriffe zurückführen, dieselbe aus einfacheren Sätzen ableiten und die Art des Zusammenhanges jenes Satzes mit diesen erkennen.

Freilich sind nicht alle überwiesenen Sätze gewiß. Es giebt überwiesene wahre und falsche Sätze. Eine, mit Gründen bezweifelte Behauptung muß bewiesen oder widerlegt werden. Widerlegen heißt die Falschheit einer Behauptung nachweisen. Alle falschen Sätze sind begreiflicher Weise unbeweisbar. Darum aber sind nicht alle wahren Sätze beweisbar. Es giebt, wie gesagt, viele wahre unbewiesene und zugleich unbeweisbare Sätze.

Wahr, aber unbeweisbar sind z. B. alle eigentlichen Grundsätze der Mathematik — die höchsten und wichtigsten Ueberzeugungen von Gott, Unsterblichkeit, Sittlichkeit u. s. w. Diese bedürfen keines Beweises, da sie unmittelbar gewiß sind.

12. Freilich aber läßt sich für jede wahre Behauptung ein Grund anführen; denn Alles hat einen zureichenden Grund, durch den es ist, und um dessen Willen sein Dasein für wahr gehalten wird. Für alle Wahrheiten giebt es Gründe, die aber nicht immer einen Beweis bilden. So lassen sich z. B. die Grundüberzeugungen des Menschen über seine Bestimmung, die Natur und Eigenschaft der menschlichen Seele begründen, aber nicht beweisen, vielweniger mathematisch beweisen. Dadurch aber werden sie nicht im mindesten unsicher und schwankend. Das Gebiet des beweisenden Verstandes erstreckt sich mit nichten über das ganze Gebiet des erkennenden Geistes, und die Anmaßung des sich selbst mißverstehenden Verstandes, Alles vor seinen Richterstuhl zu ziehen, muß geradezu verworfen werden.

Anmerkung. Die Nicht-Anerkennung dieser Wahrheit, zum Theil herrührend vom Mangel der Auffassung der Gränze zwischen den Ge-

Digitized by Google

bieten des Verstandes und des Gemüths, hat, nach meinem Bedünken, für die Gestaltung des Unterrichts sehr nachtheilige Folgen gehabt. Man behandelt nicht selten die tiefsten und höchsten Gegenstände wie Begriffe und Machwerke des Verstandes und zieht in dieser Weise das Uebersinnliche und Unendliche in den Kreis des Sinnlichen und Endlichen. Ich glaube daher, daß eine scharfe Nachweisung der Gränze zwischen Verstand und Gemüth ein für die Methodik des Unterrichts sehr segensreiches Unternehmen sein müsse.

13. Ur- oder Grundbegriffe sind diejenigen, welche nicht weiter von anderen abgeleitet werden können; z. B. die Begriffe, Linie, Ausdehnung, Raum u. s. w.

14. Das unter dieser Nummer angeführte Beispiel hat den Zweck, nachzuweisen, daß wir auch in der Natur nicht bis in's Unendliche von einander ableiten können. Wenn wir irgend eine physische Erscheinung erklären, so leiten wir sie auf die sie bedingende Ursache zurück. Diese Ursache können wir häufig als Wirkung einer tiefer liegenden Ursache ansehen u. s. w., bis wir genöthigt sind, eine als erste oder letzte Ursache anzusehen, welche wir, wegen unseres endlichen Erkenntnißvermögens und der dadurch bedingten mangelhaften Erkenntniß der Naturkräfte, nicht weiter auf eine höhere Ursache zurückzuführen im Stande sind. Solche, (als die letzten von uns erkannten) Kräfte nennen wir Urkräfte, ohne mit Gewißheit bestimmen zu können, ob sie wirklich nicht weiter von andern Ursachen abhangen. Manche Kräfte, welche in früheren Zeiten als letzte Ursachen angesehen wurden, werden jetzt, bei gesteigerter Einsicht in das Walten der Natur, als Wirkungen betrachtet. So weit aber auch der menschliche Verstand in tiefere Ergründung der Naturerscheinungen noch fortschreiten mag, immer wird er genöthigt sein, bei der Annahme von Grundkräften stehen zu bleiben. Dergleichen sind z. B. für unsere heutige Naturkenntniß die Anziehungs- und Abstoßungskraft der Materie.

15. Aus dem Bisherigen, wie aus der Einsicht in die Natur unseres Geistes und der Dinge, wird es einleuchtend, daß durchaus nicht alles Gewisse bewiesen werden kann, und daß die Unbeweisbarkeit einer Behauptung noch kein Beweis für die Falschheit derselben ist.

Anmerkung. Der nachstehende Abschnitt war in der ersten Auflage unter §. 27 enthalten. Ich halte es für's Beste, ihn jetzt aus dem Schülerbuche in das Lehrerbuch überzutragen.

Digitized by Google

§. 26.* Die bei Behandlung der Geometrie üblichen Methoden.

Bei den geometrischen Beweisen leiten uns folgende Grundsätze des Denkens:

1) was aus wahren Sätzen folgt, ist wahr;
2) was einem wahren Satze widerspricht, ist falsch.

Oder: ein Satz, dessen Folgen anerkannt wahren Sätzen zuwider sind, ist falsch.

Oder: ein Satz, der falsche Folgen hat, ist falsch.

3) Ein Satz, der mit andern Sätzen so zusammenhängt, daß sie mit ihm stehen und fallen, muß wahr sein, wenn die mit ihm in nothwendigem Zusammenhange stehenden Sätze wahr sind; im Gegentheile ist er falsch.

Die Anwendung des ersten Grundsatzes erzeugt die fortschreitende, progressive (geometrisch-) synthetische Methode.

Die Anwendung des zweiten Grundsatzes führt auf die apagogische Beweisart.

Die Anwendung des dritten Grundsatzes giebt die (geometrisch-) analytische Methode.

In der Synthesis gehen wir von den Grundsätzen und Grundbegriffen zu den daraus sich ergebenden Folgerungen über, fortschreitend vom bereits Begründeten zu dem, was sich dadurch begründen läßt. In der Analysis steigen wir rückwärts von den Folgen zu den Gründen auf. Die Analysis ist die umgekehrte Synthesis.

Synthetisch reihen wir Gewisses mit Gewissem zusammen; analytisch suchen wir erst die Brücke, welche das noch Ungewisse (Hypothetische und Problematische) mit Gewissem verbinden, und dadurch als Wahrheit erkannt werden soll. In der synthetischen Methode fügen wir Stein an Stein, mit dem Fundamente beginnend und dasselbe weiter führend; in der analytischen Methode prüfen wir die Nutzbarkeit und den Werth eines gefundenen Steines daran, ob er sich dem Gebäude harmonisch anfügen lasse, oder nicht. Jene ist der Weg für den ungeübten Wanderer, diese die freie Bahn des erfinderischen Kopfes. Jene muß wenigstens zu dieser hinführen.

Die meisten Sätze der Geometrie werden synthetisch gefunden und behandelt, die Conversen gewöhnlich apagogisch bewiesen. Die analytische Methode ist bei der Lösung von Aufgaben vorzüglich brauchbar. Alle Wahrheiten, die du durch dieses Büchlein zu erwarten hast, sind auf synthetischem Wege gewonnen worden. Dir zu Nutz und Frommen will ich eine Aufgabe analytisch lösen.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen geraden Linie a b ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben. (Fig. 78.)

Analysis. Es kommt nur darauf an, den Punkt der Spitze des Dreiecks zu finden. Angenommen c sey der gesuchte Punkt und a b c das verlangte Dreieck, so muß ca = cb = ab sein, d. h. c und b müssen gleich weit von a entfernt sein. Also müssen beide Punkte b und c auf dem Umringe eines Kreises liegen, dessen Centrum a und dessen Halbmesser ab ist.

Digitized by Google

Ebenso sind c und a gleich weit entfernt von b; folglich müssen beide auf der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Centrum b und Radius ba ist. Beschreibt man daher aus a mit ba Kreis, so liegt der gesuchte Punkt c auf den Peripherien beider Kreise. Wenn aber ein Punkt zugleich auf 2 Linien liegt, so liegt er da, wo sich beide durchschneiden. Folglich sind die beiden Durchschnittspunkte der Peripherien die Orte, wo der Punkt c liegen kann, und wenn man a und b durch gerade Linien mit diesen Punkten verbindet, so entstehen 2 Dreiecke, welche der Aufgabe Genüge leisten.

Beweis.

ac = ab (Radien eines Kreises)
bc = ab (deßgl.)
ac = bc (Grundsatz 3)
△abc gleichseitig.

Anmerkung 1. Ueber das Wesen der verschiedenen Methoden, geometrische Wahrheiten zu behandeln, möge zur Uebersicht noch Folgendes beigefügt werden.

Um einen Satz, der allgemein so ausgedrückt werden kann:

„Wenn ein Gegenstand M die Eigenschaften a, b, c u. s. w. hat, so hat er auch die Eigenschaft g" — oder: „an einem Gegenstande M durch die Eigenschaften a, b, c u. s. w. die Eigenschaft g zu erzeugen"

zu begründen, kann ein dreifacher Weg eingeschlagen werden. Entweder zeigt man

1) daß unter den gegebenen Bedingungen a, b, c und zufolge bereits anerkannter Wahrheiten dem Gegenstande M die Eigenschaft g zukomme (direkter, synthetischer Lehrgang. Beispiel: §. 22. Zus. 1.) Oder

2) man nimmt an, dem Gegenstande M komme unter den Bedingungen a, b, c das (contradictorische) Gegentheil von g, nämlich nicht-g zu. Dann schließt man weiter, und wenn man dadurch zu einer Behauptung gelangt, welche anerkannt wahren Sätzen widerspricht, so ist der angenommene Satz, M sey nicht-g falsch, und das Gegentheil, M habe die Eigenschaft g, wahr. (Apagogischer Beweis). Oder:

3) man giebt zu, M habe unter den Bedingungen a, b, c die Eigenschaft g, oder die Eigenschaft g sei hervorgebracht, aber man erkennt noch nicht den Zusammenhang und die Art der Abhängigkeit des g von a, b, c. Alsdann untersucht man, wovon g zunächst bedingt wird, oder welche Eigenschaft zunächst mit g zusammenhängt. Man findet z. B. f; so ausgedrückt:

wenn g ist, so ist f. Demnächst findet man:

wenn f ist, so ist e. Dann: wenn e ist, so ist d.

Und endlich: wenn d ist, so muß c sein.

Nun ist aber c, folglich auch d, und damit e, und hiermit f, und folglich auch g. (Analytische Methode.) Hieraus geht zugleich hervor, daß die apagogische Beweisart eine Art Analysis ist. Dieselbe ist anwendbar sowohl bei Lehrsätzen, wie bei Aufgaben. Das Letztere ist schon gezeigt worden. Die Anwendung des analytischen Verfahrens auf zwei Lehrsätze folge noch.

Digitized by Google

A. (Fig. 79.) Lehrsatz: o = z

Beweis.

Angenommen: o = z
x = x

o + x = z + x
o + x = 2 R
z + x = 2 R

Also wirklich o + x = z + x

Folglich auch o = z

B. Fig. 80. Wenn a, b, c, d ein Quadrat ist, und man zieht die Diagonale ac, und durch g die Linie eh ∥ ab und fk ∥ ad, so ist afge ein Quadrat.

Analytischer Beweis. Daß die ⌊ des Vierecks R sind, lehrt der Augenschein. Ebenso, daß die gegenüberstehenden Seiten gleich sind. Ob auch die anliegenden?

Gesetzt, af = fg; alsdann ist △ afg gleichschenklig.

Folglich ⌊ fag = ⌊ fga
⌊ fga = ⌊ bca .

⌊ fag = ⌊ bca

Folglich müßte ab = bc sein. Dieses ist; folglich ist auch af = fg und afge ein Quadrat.

Anmerkung 2. Bisher haben wir die geometrischen Gegenstände: „Punkt, Linie, Winkel, Figur" der Betrachtung unterworfen. Vom Körper war nur in so fern die Rede, als es Veranlassung gab, die genannten Objecte aufzufinden. Alle Formen und deren Verbindungen dachten wir uns in derselben Ebene liegend. Nunmehr wollen wir die Untersuchung auf einfache Formen, die sich in verschiedenen Ebenen, in körperlichen Räumen vorfinden, so wie auf die Beschauung und Betrachtung verschiedener Arten von Körpern ausdehnen, wobei die geometrischen Gegenstände, welche bisher behandelt wurden, allerdings wieder mit vorkommen. Wir haben es also nun vorzüglich mit körperlichen Räumen zu thun. Damit beschäftigt sich ein eigener Zweig der Raumlehre, die Körperlehre (Stereometrie), von welcher hier nur die ersten Anfangsgründe vorkommen, vornämlich solche, welche durch klare Anschauung erkannt werden können. Unser Augenmerk ist vorzüglich auf Gestalt und Form der körperlichen Raumgrößen gerichtet. Die schwierigeren Verbindungen, Berechnungen und Ausmessungen überlassen wir der wissenschaftlichen Untersuchung. Die Körperlehre ist der zweite Theil der Geometrie und folgt auf die ebene Geometrie.

Der Schüler entwirft die Bilder, welche (geistige) Wahrheiten versinnlichen, nach eigener Ueberlegung, was darum möglich ist, weil diese Wahrheiten aus der Natur unseres Anschauungs- und Vorstellungsvermögens hervorgehen. Der glückliche Fortgang wird durch den Gebrauch der in jeder wohl eingerichteten Schule vorhandenen Modelle geometrischer Körper befördert und gesichert. Zugleich muß eine Anzahl Pappenscheiben und Stäbchen vorhanden sein, welche die Versinnlichung der

Digitized by Google

Flächen, der Neigung gerader Linien gegen dieselben, der Lage der Flächen u. s. w. möglich machen.

Auch bietet die Betrachtung der Gegenstände in der freien Natur vielfache Gelegenheit und Anregung zur Auffindung und Versinnlichung der Grundvorstellungen der Körperlehre, so wie umgekehrt die Aufsuchung dessen, was die Natur den gedachten Formen Entsprechendes enthält, nicht versäumt werden darf. Sowohl in der unorganischen, als in der organischen Natur treten vollkommen oder zum Theil regelmäßige Gestalten hervor. Darum ist die Körperlehre einer sinnigen Betrachtung der Natur ungemein förderlich und liefert den Beweis, in welch hohem Grade von Harmonie die geistige (Ideal-) Welt mit der wirklichen (Real-) Welt steht. Vom regelmäßigen Steinkrystall bis zu den Früchten der Pflanzen läuft eine große Reihe plastischer Gebilde. *)

An den Schüler ergeht also hiermit ein für alle Mal die Aufforderung, das Gedachte sinnlich darzustellen, die Gewißheit der Vorstellungen erfahrungsmäßig nachzuweisen, damit die Wechselrede die gehörige Verständlichkeit erhalte und die Congruenz der (innern) Gedanken und der äußern Dinge daraus hervorgehe.

Ueber diesen §. erlaube ich mir noch folgende Bemerkungen. — Derselbe ist nur für den reiferen Schüler, und er setzt eine geschickte Behandlung des Lehrers voraus. Wer ihn zu schwer oder für unzweckmäßig hält, überschlage ihn. Da ich der Meinung bin, daß dem wahrhaft durchzubildenden Schüler die Einsicht in die Art des Verfahrens, der Operationen seines Geistes und der Methoden nicht vorenthalten werden darf, so durfte ich diesen §. nicht ganz übergehen. Der Schüler soll in rationellen Dingen wissen: was, warum und wie, d. h. auf welche Weise und durch welche Geisteskraft? Ein wahrhaft tief bildendes Buch liefert Materialien von allerhand Art und von verschiedenem Kaliber, leichte und schwere, leicht ansprechende und tief aufregende; Milch und Speise. Dem Lehrer muß es überlassen bleiben, aus den vorhandenen Materialien auszuwählen, wie es der Standpunkt und das Bedürfniß seiner Schüler überhaupt und einzelner Schüler erheischt. Daher sollte nach meiner Ansicht jedes für Schulen geschriebene Buch einem Magazine ähnlich sein, in welchem man einen reichen Vorrath der mannigfaltigsten Waaren findet. — Dem denkenden Lehrer ist es unerträglich, wenn ihm jeder Schritt vorgethan wird; er fühlt dadurch seine Selbstthätigkeit beengt und seine Individualität verwischt. Darum haßt er solchen beengenden Leitfaden. Aus diesem Grunde habe ich es verschmäht, Alles ganz plan und eben zu

---

*) „Die Natur kann uns gar nicht anders erscheinen, als in solchen Formen, die unserm Geiste eingebildet sind. Der Geist des Menschen erscheint vermittelst der Idee der Wahrheit als Gesetzgeber der Natur." Psychologie von Eschenmayer. Stuttgardt, 1817. S. 448.

Digitized by Google

machen und jeden Hügel abzutragen, damit nicht Alles einem holländischen Garten gleiche. Der kräftige Reisende liebt die Abwechselung der Berge und der Thäler, der Höhen und der Ebenen. Auch ist es nicht angenehm, unaufhörlich auf- oder abwärts zu steigen. Alles dieses muß mit einander abwechseln, wenn die Reise den Körper wahrhaft stärken und kräftigen soll. Gerade so soll es, wie es mir scheint, mit einem Buche sein, das den Schüler durch ein wissenschaftliches Gebiet hindurchführen will; und so sehr ich auch von der Richtigkeit der Behauptung der Pädagogen, daß das Leichtere dem Schwereren vorangehen müsse, im Allgemeinen überzeugt bin, so sehe ich diesen Grundsatz doch nicht gerne so weit ausgedehnt, daß jedes Vorangehende immer und überall auch das Leichtere sei. Die Schule sei einer Reise, überhaupt dem Leben gleich. Auch dieses macht manchmal im Anfange schwerere Anforderungen als späterhin, und auf Reisen hat man manchmal gleich zu Anfang einen Berg zu ersteigen, an den sich eine Ebene anschließt, worauf dann wieder Berge und Thäler folgen. So sehe ich es auch gerne in der Schule und in den Büchern. — Gewährt nun auch ein für den Schüler bestimmtes Buch zugleich den Vortheil, daß der Lehrer sich durch dasselbe weiter bildet, indem es seine ganze geistige Thätigkeit in Anspruch nimmt, so verdient seine Einrichtung wegen des unmittelbaren und mittelbaren Nutzens, welchen es bringt, um so mehr beifallswerthe Anerkennung. Ich habe diese beiden Zwecke erreichen wollen. —

§. 27. Fläche und Punkt.

1. Die Fläche hat Länge und Breite, der Körper Länge, Breite und Höhe. Flächen und Körper unterscheiden sich von einander durch ihre Form; es giebt ebene und krumme Flächen; Körper, welche von ebenen und krummen Flächen begränzt sind u. s. w.
2. Die Lage einer g. L. wird durch 2 Punkte bestimmt. Denkst du dir durch 2 Punkte oder durch die dadurch bestimmte g. L. eine Ebene gelegt, so kann diese Ebene in drehender Richtung um diese g. L. bewegt werden, ohne daß sie diese Punkte verläßt; die Lage einer Ebene wird also durch 2 Punkte noch nicht bestimmt. Soll sie aber noch durch einen dritten Punkt gehen, welcher mit jenen beiden nicht in gerader Linie liegt, so kann dieß nur auf eine Art geschehen, d. h. nur in einer Lage der Ebene ist dieß möglich; folglich wird die Lage jeder Ebene durch 3, nicht in derselben geraden Linie liegende, Punkte bestimmt.
3. Man kann demnach durch alle diejenigen Formen im Raume

Digitized by Google

eine, und zwar nur eine Ebene gelegt denken, in welchen 3, nicht in derselben geraden Linie liegende Punkte bestimmt sind, z. B. durch jedes geradlinige △, durch die beiden Schenkel eines geradlinigen Winkels, durch 2 Parallelen; d. h. durch jedes geradlinige △, durch die beiden Schenkel eines geradlinigen Winkels, durch jede 2 Parallelen ist die Lage einer Ebene, nämlich die Ebene des Dreiecks, des Winkels und der Parallelen fest bestimmt.

4 u. 5. Durch je 3 Punkte, welche nicht in derselben geraden Linie liegen, zwischen welchen also 3 g. L. gezogen werden können, ist die Lage einer Ebene bestimmt. So oft also in einer gewissen Anzahl von Punkten, von welchen nicht 3 in einer g. L. liegen, »je drei« bestimmt werden können, so viele verschiedene Ebenen sind auch durch die gegebenen Punkte bestimmt. Ist die Zahl der gegebenen Punkte 4, 5, 6, n, so hat man, um die Anzahl der durch sie bestimmten verschiedenen Ebenen zu finden, nur zu untersuchen, wie viel Gedreie (Ternen) durch 4, 5, 6, n Punkte gebildet werden. Diese Aufgabe ist bereits in §. 12 Nro. 22. I. gelöset worden. Daselbst wurde gefunden, daß

4 Punkte 4 Gedreie
5 = 10 =
6 = 20 =
$$n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

bilden. Durch 4, 5, 6, n Punkte werden also auch der Reihe nach 4, 10, 20 u. s. w. Ebenen der Lage nach bestimmt.

6. Jede Ebene kann auf mancherlei Weise bewegt gedacht werden. Alle diese Bewegungsarten lassen sich aber auf die beiden zurückführen, daß die Ebene sich entweder in derselben Richtung, in welcher sie liegt, oder nicht in derselben Richtung oder Lage bewegt. In jenem Falle ist das Produkt ihrer Bewegung wieder eine Ebene, in diesem Falle ein nach drei verschiedenen Dehnungsrichtungen ausgedehnter, folglich ein körperlicher Raum.

7. Die krumme Fläche ist entweder in sich selbst geschlossen wie z. B. die Kugeloberfläche, oder nicht. Die ebene Fläche kann nicht auf diese Weise in sich selbst geschlossen sein, weil ihre Theile alle in gerader Richtung liegen. Betrachte ich nun die verschiedenen Lagen eines Punktes gegen eine Fläche, so bemerke ich, daß der Punkt entweder innerhalb der Fläche liegt, oder außerhalb derselben. Letzteres kann in Bezug auf eine in sich geschlossene, folglich krumme, Fläche auf zweifache Weise statt finden; denn der Punkt liegt entweder innerhalb oder außerhalb des Raumes, welchen die Fläche umschließt.

Digitized by Google

8. Vorausgesetzt, daß der Punkt sich in gerader Linie bewegt, so finden folgende Fälle statt.
   a) Wenn der Punkt in der Ebene liegt, so bewegt er sich entweder in der Ebene fort, oder er verläßt dieselbe, und dieses entweder in senkrechter oder schiefer Richtung gegen die Ebene.
   b) Wenn der Punkt außerhalb der Ebene liegt, so nähert er sich entweder der Ebene, oder er entfernt sich von ihr, oder es findet weder jenes, noch dieses statt. Im ersten und zweiten Falle ist seine Richtung entweder senkrecht oder schief gegen die Ebene; im dritten Falle ist seine Richtung parallel mit der Ebene.
9. Ist die Entfernung eines Punktes von allen Punkten einer Fläche immer dieselbe, so muß die Fläche krumm und zwar eine Kugelfläche oder ein Theil einer Kugelfläche sein. Der Punkt hat alsdann die Lage des Mittelpunktes der Kugeloberfläche.
10. Hat ein innerhalb einer Fläche liegender Punkt von allen ihren Gränzpunkten dieselbe Entfernung, so ist die Fläche entweder kugelförmig gekrümmt, oder sie ist eben, und in letzterem Falle eine Kreisebene.

11 u. 12. Liegt ein Punkt weder innerhalb, noch in der Verlängerung einer Ebene, so liegt er einem Punkte der Ebene am nächsten, und zwar demjenigen, welchen das von dem auf die Ebene gefällte Perpendikel trifft. Wäre dieser Punkt bereits bestimmt, und würde er mit dem ersteren durch eine g. L. verbunden; so hätte dieselbe gegen die Ebene eine senkrechte Lage.

13. Von jedem Punkte außerhalb einer Ebene kann also ein Perpendikel auf dieselbe gefällt werden. Und ebenso kann man in jedem Punkte einer Ebene ein Perpendikel auf dieselbe errichten.

14. Unter der Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man die kürzeste g. L., welche von dem Punkte nach einem Punkte der Ebene möglich ist, folglich das Perpendikel.

15. Senkrecht im eigentlichen Sinne steht eine gerade Linie nur auf einer geraden. Denkt man sich aber eine krumme Linie aus unzählig vielen geraden Linien zusammengesetzt, so kann man auch sagen, daß eine g. L. auf einer krummen, wenn sie gegen beide Seiten derselben einerlei Neigung hat, senkrecht stehe; z. B. der Radius auf der Peripherie des Kreises. Wie die Kreisperipherie in jedem Punkte ihre Richtung ändert, also unzählig viele Richtungen hat, so auch die Oberfläche der Kugel; und in dem Sinne, in welchem jeder Halbmesser des Kreises auf der Kreisperipherie senkrecht steht,

Digitized by Google

in demselben Sinne steht auch jeder Halbmesser der Kugel auf der Kugeloberfläche senkrecht. Jeder Theil derselben wird dann als eine unendlich kleine Ebene angesehen.

§. 28. Fläche und Linie.

1. Eine g. L. liegt entweder außerhalb oder innerhalb einer Fläche. Fällt die g. L. mit einer krummen Fläche zusammen, so ist die Fläche in der Richtung der g. L. als gerade anzusehen; mit einer nach allen Seiten gekrümmten Fläche kann eine g. L. nicht zusammenfallen. Liegt die g. L. außerhalb einer Ebene, so trifft sie verlängert entweder die Ebene, oder sie trifft sie nicht; in jenem Falle entweder senkrecht, oder schief; in diesem Falle liegt sie der Ebene parallel.
2. Fallen nur die Endpunkte einer g. L. mit einer Fläche zusammen, so ist die Fläche nothwendig krumm.
3. Parallel ist die Lage einer g. L. gegen eine Ebene, wenn beide, gehörig verlängert, einander nie treffen.
4. Eine g. L. kann nur in sofern einer krummen Fläche parallel liegen, in wiefern eine einseitig krumme Fläche, z. B. die Oberfläche einer Walze, nach einer Richtung als gerade angesehen werden kann.
5. Hat eine krumme Linie mit einer krummen Fläche einerlei Lage und Krümmung, wie z. B. der Meridian des Himmels mit der Oberfläche der Erde, und ist die Entfernung aller Punkte einer krummen Linie von einer Ebene dieselbe, so können jene und diese als parallel angesehen werden. — Sind alle Punkte einer krummen Linie von einer Ebene gleich weit entfernt, so kann die krumme Linie als der Ebene parallel angesehen werden.
6. Eine g. L. berührt eine krumme Fläche, wenn sie, so weit sie auch verlängert werden mag, nur einen Punkt mit der Fläche gemein hat.
7. Hat eine g. L. mit einer Ebene nur einen Punkt gemein, so muß sie verlängert auf die andere Seite der Ebene treten, d. h. sie durchschneiden.
8. Liegt eine g. L. außerhalb der Richtung einer Fläche, so kann sie, gehörig verlängert, mit der Ebene nur einen Punkt, mit der krummen Fläche aber mehrere Punkte gemein haben.
9. Hat eine g. L. mit einer Ebene mehrere Punkte gemein, so liegt die g. L. in der Richtung dieser Ebene.
10. Eine g. L. kann unter der Bedingung von Nro. 1 mit einer krummen Fläche zusammen fallen.

Digitized by Google

11. Fallen mehrere Punkte einer g. L. mit einer Ebene zusammen, so liegt die g. L. ganz in der Richtung der Ebene, weil die Richtung einer g. L. durch 2 Punkte bestimmt wird.

12. Senkrecht steht eine g. L. auf einer Ebene, wenn sie gegen alle Seiten der Ebene gleich geneigt ist.

13. Die auf einer Ebene senkrecht stehende g. L. macht mit allen, in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogenen, geraden Linien rechte Winkel.

14. Steht eine g. L. auf einer andern g. L. senkrecht, so steht sie darum nicht auf jeder Ebene senkrecht, welche durch diese andere g. L. gelegt gedacht wird. Denn durch jede g. L. können ja unzählig viele Ebenen gelegt werden.

15. Steht eine g. L. auf mehr als einer g. L., welche sich in einem Punkte einer Ebene (in welcher sie liegen) durchschneiden, senkrecht, so steht sie auch auf allen, durch diesen Punkt in der genannten Ebene zu ziehenden, g. L., auf der ganzen Ebene senkrecht.

16. Schief steht eine g. L. auf einer Ebene, wenn sie nicht auf zweien g. L., welche durch ihren Fußpunkt in diese Ebene gelegt sind, senkrecht stehet.

17. Sie hat in diesem Falle gegen alle Linien der Ebene eine verschiedene Lage. Mit einer macht sie den größten und mit einer zweiten, welche mit jener eine g. L. bildet, macht sie den kleinsten Winkel. Diesen kleinsten Winkel findet man, wenn man aus einem Punkte jener Linien auf die Ebene ein Perpendikel herabläßt, und den Fußpunkt dieses Perpendikels, mit dem Fußpunkte jener Linie verbindet. Verlängert man diese Linie, so hat man den größten Winkel.

18. Unter der Neigung einer g. L. gegen eine Ebene, versteht man den kleinsten Winkel, welchen sie mit einer durch ihren Fußpunkt in der Ebene gelegten g. L. macht. Dieser kleinste Winkel heißt der Neigungswinkel der g. L. gegen die Ebene. Derselbe ist entweder ein spitzer, oder ein rechter Winkel.

19. Eine schief auf einer Ebene stehende g. L., d. h., eine g. L., deren kleinster Winkel (in dem angegebenen Sinne) nicht = R ist, bildet mit der Ebene einen spitzen Winkel.

20. Schief eine Ebene treffende gerade Linien können sehr verschiedene Lagen gegen die Ebene haben. Nur die auf der Ebene senkrecht stehende g. L. hat eine beständige (constante) Lage gegen dieselbe.

21. Wenn eine zweier Parallelen auf einer Ebene senkrecht steht, so steht auch die andere der Parallelen auf derselben Ebene senkrecht; und hat eine jener Linien eine parallele Lage gegen

Digitized by Google

die Ebene, so liegt auch die andere g. Linie mit der Ebene parallel.

22. Liegen die beiden Schenkel eines geradlinigen Winkels einer Ebene parallel, so liegt die Ebene des Winkels auch dieser Ebene parallel; denn die Lage der Winkelebene wird durch die Lage der Schenkel bestimmt.

23. Hat ein Schenkel eines rechten Winkels gegen eine Ebene eine senkrechte oder parallele Lage, so liegt in jenem Falle der andere Schenkel mit der Ebene parallel; in diesem Falle ist die Lage des andern Schenkels gegen die Ebene gar nicht bestimmt, weil auf einer g. L. nach allen möglichen Richtungen senkrechte Linien errichtet werden können.

24. Wenn ein Schenkel eines stumpfen oder spitzen Winkels auf einer Ebene senkrecht steht, so hat der andere Schenkel eine schiefe Lage gegen die Ebene. Wäre dieß nicht, so müßte der Winkel ein rechter sein.

25. Haben die 3 Winkelpunkte eines ebenen △ gleiche Entfernung von einer Ebene, d. h., sind die von den 3 Winkelpunkten auf die Ebene gefällten Perpendikel einander gleich, so ist die Dreieck-Ebene mit jener Ebene parallel; denn durch 3 Punkte wird die Lage einer Ebene bestimmt.

26. Aus demselben Grunde hat ein Vier-, Fünfeck u. s. w. eine parallele Lage mit einer Ebene, wenn 3 Punkte der Ebene jener Figuren von dieser Ebene gleiche Entfernung haben.

§. 29. Mehrere Flächen.

1. 2 Ebenen haben entweder eine parallele, oder nicht-parallele Lage gegen einander. Im letzteren Falle treffen sie sich, gehörig verlängert.

2. 2 Ebenen sind parallel, wenn sie gehörig verlängert, einander nicht begegnen; ist dieses der Fall, so sind sie nicht parallel, sondern gegen einander geneigt.

3. 2 krumme Flächen können in dem Falle, wenn sie immer gleich weit von einander entfernt bleiben, als parallel angesehen werden.

4. Eine ebene Fläche kann einer krummen nicht parallel liegen.

5. Eine Ebene steht auf einer andern senkrecht, wenn sie sich gegen beide Seiten derselben gleich neigt, oder wenn sie rechte Winkel mit ihr bildet.

6. Eine ebene Fläche kann in dem Falle als senkrecht stehend auf einer krummen Fläche angesehen werden, wenn sie sich gegen beide Seiten derselben auf dieselbe Art neigt.

Digitized by Google

7. Steht eine Ebene auf einer andern senkrecht, so steht auch diese auf jener senkrecht.

8. u. 9. Wenn 2 Ebenen einander schneiden, so geschieht dieß in einer geraden Linie; sie haben in diesem Falle eine g. L. mit einander gemein.

10. Wenn 2 Ebenen 3, nicht in derselben geraden Linie liegende Punkte mit einander gemein haben, so bilden sie nur eine Ebene; denn die Lage einer Ebene wird durch 3 solcher Punkte bestimmt.

11. In derselben g. L. können unzählig viele Ebenen einander durchschneiden.

12. Eine Ebene kann eine einseitig krumme Fläche in einer g. L. durchschneiden; nicht aber eine Ebene eine Kugelfläche; durch letzteres entsteht nothwendig eine krumme Linie, und zwar eine Kreislinie. Dasselbe ist der Fall, wenn 2 Kugeloberflächen einander schneiden.

13. Durch den gegenseitigen Durchschnitt zweier Ebenen entstehen 4 Winkel.

14. Solche Winkel nennt man Zweiflach- oder Flächenwinkel. Ein Flächenwinkel ist ein solcher, welcher durch den Durchschnitt zweier Flächen entsteht.

15. Der Flächenwinkel wird von 2 Flächen, der Linienwinkel von 2 Linien gebildet. Der Form nach giebt es 3 Arten Flächenwinkel, je nachdem sie entweder von 2 Ebenen, oder von 2 krummen Flächen, oder von einer Ebene und einer krummen Fläche gebildet werden.

16. Geneigt heißt die Lage zweier Ebenen gegen einander, wenn sie schiefe Winkel mit einander machen.

17. Die Größe der gegenseitigen Neigung zweier Ebenen bestimmt man nach dem Verhältniß der Winkel zum rechten Winkel. Man führt also die Größe der Flächenwinkel auf die Größe der Linienwinkel zurück.

18. Man errichtet zu dem Ende in einem Punkte der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie, auf dieselbe, in jeder der beiden Ebenen, ein Perpendikel und nennt den Winkel, welchen diese beiden Perpendikel mit einandr bilden, den Neigungswinkel der beiden Ebenen. Die durch diesen Neigungswinkel gelegte Ebene nennt man die Ebene des Neigungswinkels.

19. Dieser Neigungswinkel ist entweder ein rechter, oder ein spitzer, oder ein stumpfer.

20. Unter der genannten Bedingung ist der Neigungswinkel anfangs spitz; er wird dann ein rechter, darauf stumpf, hierauf $= 2$ R, dann > 2 R oder erhaben. Ein hohler Flächenwinkel ist < 2 R, ein flacher $= 2$ R, ein erhabener > 2 R.

Digitized by Google

Unter einer Kante versteht man den erhabenen Flächenwinkel, und man nennt die gerade Linie einer solchen Kante die Kantenlinie.

21. Flächen-Nebenwinkel sind solche, welche an der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie zweier Flächen liegen, ein gemeinschaftliche Fläche als Schenkelfläche haben, und deren andere Schenkelflächen zu einer Fläche gehören.

22. Ihre Summe ist = 2 R; denn ihre Größe wird nach der Größe geradliniger Neben-Winkel bestimmt, deren Summe = 2 R.

23. Für sich klar ist es, was man unter Flächen-Scheitelwinkel versteht. Ihre Schenkelflächen liegen in denselben Ebenen oder Flächen. Sie sind einander gleich.

24. Diejenigen Flächenwinkel decken einander, deren Schenkelflächen gleiche Neigung gegen einander haben.

25. Legt man durch eine g. L., welche auf einer Ebene senkrecht steht, eine oder mehrere Ebenen, so stehen alle diese auf jener Ebene senkrecht.

Steht die g. L. schief auf der Ebene, so ist die Lage der durch sie gelegten Ebenen gegen jene Ebene unbestimmt.

26. Steht von 2 parallelen Ebenen eine auf einer dritten Ebene senkrecht, so steht auch die andere der parallelen Ebenen auf der dritten senkrecht.

27. Wenn auf einer von zweien, auf einander senkrecht stehenden, Ebenen eine dritte senkrecht steht, so hat diese dritte mit der anderen jener 2 Ebenen eine parallele Lage. Ist aber der Neigungswinkel jener schief, so ist auch die Lage der dritten Ebene gegen die zweite der Parallelen geneigt.

28. Wenn die gemeinschaftliche Durchschnittslinie zweier Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht steht, so steht auch jede jener beiden Ebenen auf der dritten Ebene senkrecht.

29. Wenn 2 oder mehrere parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien unter einander parallel.

30. Wie durch den Durchschnitt zweier parallelen Linien mit einer dritten Wechsel- und Gegenwinkel entstehen, so auch, wenn 2 parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchschnitten werden. Auch in diesem Falle sind die äußeren und inneren Gegen- und Wechselwinkel einander gleich, und die Summe der inneren, auf einer Seite der schneidenden Ebene liegenden Flächenwinkel ist = 2 R.

31. Wie die gerade Linie die kürzeste ist zwischen zweien Punkten, so ist von zwei Flächen, welche dieselben Gränzen haben, die Ebene am kürzesten.

Digitized by Google

32. Zwischen 3 solcher Ebenen liegen 3 Zwischenräume; zwischen 4 : $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$; zwischen 5 : $\frac{5 \cdot 4}{2}$; zwischen n : $\frac{n\,(n-1)}{2}$.

33. Ein zwischen zwei parallelen Ebenen liegender Zwischenraum ist nach einer Dehnungsrichtung begränzt, z. B. nach der Höhe, nicht aber Länge und Breite.

34. Diese Aufgabe ist bereits §. 10 Nro. 13 gelöset. Was dort durch gerade Linien und deren Durchschnittspunkte entstand, wird hier durch Ebenen und deren Durchschnittslinien hervorgebracht. Sonst ist in beiden Aufgaben Alles dasselbe.

35. Da an jeder Durchschnittslinie zweier Ebenen 4 Winkel liegen können, so werden durch alle möglichen Durchschnitte einer Anzahl Ebenen 4mal so viele Flächenwinkel hervorgebracht, als Durchschnittslinien entstehen. Die Formel für die Zahl aller Durchschnittslinien für n Ebenen ist $\frac{n\,(n-1)}{2}$; die Zahl aller möglichen Flächenwinkel wird demnach durch die Formel $\frac{4\,n\,(n-1)}{2} = 2\,n\,(n-1)$ ausgedrückt.

36. Auch diese Aufgabe ist §. 12 Nro. 42 gelöset. Die Anzahl der dort betrachteten Zwischenräume zwischen einer Anzahl gerader, in der höchsten Anzahl von Punkten einander durchschneidenden Linien ist gleich der Anzahl der Zwischenräume, welche zwischen einer Anzahl von Ebenen, welche sich in der höchsten Anzahl von Linien durchschneiden, liegen.

37. Einen körperlichen Raum umschließen kann nur eine krumme, nicht eine gerade Fläche.

38. Soll ein körperlicher Raum von Ebenen begränzt werden, so gehören dazu wenigstens 4 Ebenen.

39. Die geringste Anzahl verschiedenartig gestalteter, ebener und krummer, Flächen, welche einen körperlichen Raum ganz begränzen können, ist 2 — eine ebene und eine krumme Fläche.

40. Durchschneiden 3 Ebenen einander so, daß die Durchschnittslinien unter sich parallel liegen, so hat der von den Ebenen umschlossene Raum eine dreieckige (dreikantige) Form, von gleicher Dicke in allen Theilen.

41. Der allseitig begränzte Raum oder der geometrische Körper wird in Gedanken aus der Vorstellung »Raum« dadurch erzeugt, daß man sich einen Theil dieses Raumes allseitig begränzt denkt.

42. Regelmäßig oder regulär heißt derjenige Körper, welcher von, an sich regelmäßigen, unter einander congruenten Figuren begränzt wird und dessen Ecken alle in einander passen.

Digitized by Google

§. 30. Prismen.

1 — 3. An dem Würfel bemerkt man: 6 Flächen (Quadrate), 12 Kanten, 12 Kantenlinien, 12 Flächenwinkel, 8 Ecken, in jedem Quadrate 4 Winkel, in 6 Quadraten also 6.4 = 24 Winkel; oder an jeder Ecke 3 Winkel, an 8 Ecken also 8.3 = 24 Winkel. Denke ich mir je 2 und 2 einander gegenüberliegende Ecken, Flächen oder Kantenlinien durch eine g. L. verbunden, so entstehen Achsen, um welche man sich den Würfel herum gedreht denken kann, und zwar 4 Ecken-, 3 Flächen- und 6 Kantenachsen.

4. Unter Ecke versteht man in der Geometrie das Aeußere eines Körpers an demjenigen Punkte, von welchem 3 oder mehr Kantenlinien ausgehen.

5. Denke ich mir eine Ecke nach dem Innern des Körpers hohl, so entsteht ein Raum, welcher dem Raume eines ebenen Winkels verglichen werden kann. Ein solcher Raum heißt ein körperlicher Winkel.

6. Unter einem körperlichen (Körper-) Winkel versteht man den inneren Raum, welcher an jeder Ecke eines Körpers liegt. Derselbe ist nach der Richtung der Seitenflächen, welche den Körperwinkel bilden, begränzt, in der der Ecke entgegengesetzten Richtung aber unbegränzt.

7. Der Körperwinkel entsteht, wenn mehr als 2 Ebenen einen Punkt gemein haben und je zwei aneinander liegende sich schneiden.

8. Der Körperwinkel wird zum geringsten von 3 ebenen Winkeln begränzt.

9. Die höchste Anzahl der ebenen Winkel, welche einen Körperwinkel begränzen, ist unbestimmbar, unendlich groß.

10. Der Linienwinkel wird gebildet von zwei Linien, welche sich treffen; der Flächenwinkel von 2 sich durchschneidenden Flächen; der Körperwinkel von wenigstens 3 Flächen. (Wir denken und reden hier nur von Ebenen.)

11. Die Ecke verhält sich zum körperlichen Winkel wie das Aeussere zum Innern; beide liegen nach entgegengesetzten Richtungen von dem Punkte der Ecke aus. Beide zusammen bilden einen, von dem Endpunkte aus kugelförmig ausgedehnten Raum.

12. Der Lehrer muß bei diesen Fragen und Aufgaben nicht nur Körper verschiedener Art und Größe vor sich haben, sondern auch das Gedachte auf leibliche (äußerlich-sinnliche) Anschauungen in der Umgebung des Schülers anwenden.

Digitized by Google

13. Jedes regelmäßig gebaute Zimmer hat an den Stellen, welche man nach dem gemeinen Sprachgebrauche Ecken (= Kantenwinkel in unserer Sprache) nennt, Körperwinkel, welche von 3 rechten Winkeln gebildet werden.

14. Wie sich an Linien der erhabene Winkel zum hohlen verhält, so verhält sich die Ecke zum körperlichen Winkel.

15. In dem Sinne, in welchem der erhabene Winkel als Winkel betrachtet wird, in demselben Sinne kann auch die Ecke als Körperwinkel angesehen, die Ecke »erhabener Körperwinkel« genannt werden.

16. Wie an dem Durchschnitte zweier Linien der erhabene Winkel mit dem hohlen den Raum der Ebene an dem Durchschnittspunkte ganz einnimmt, so wird durch einen erhabenen und den dazu gehörigen hohlen Körperwinkel der ganze körperliche Raum um den Endpunkt herum erfüllt.

17. Die Anzahl der ebenen Winkel, welche an einer Ecke liegen, ist gleich der Zahl der g. L. oder Kantenlinien, welche von der Ecke ausgehen.

18. Da der Raum der Ecke nebst dem Raume des dazu gehörigen Körperwinkels den ganzen Raum der Ecke nach allen Seiten erfüllt, so stehen Wachsthum und Abnahme des einen dieser Räume in Beziehung zum Wachsthum und zur Abnahme des anderen. Wird die Ecke sehr spitz, d. h. der Raum der Ecke groß, so wird der hohle Körperwinkel klein; wird die Ecke sehr stumpf, so wird der hohle Körperwinkel groß.

19. Immer aber, auch bei der stumpfesten Ecke ist der Raum der Ecke größer als der Raum des hohlen Körperwinkels. Je mehr sich die Kantenlinien von einander entfernen, oder je größer die ebenen Winkel werden, welche die Ecke bilden, je größer wird der hohle Körperwinkel. Läßt man diese Winkel fort und fort stetig wachsen, so trifft sich's endlich, daß die Kantenlinien alle in derselben Ebene liegen. Dann ist der hohle und der erhabene Körperwinkel verschwunden; die ebenen Winkel erfüllen nun den Raum einer Ebene um *einen* Punkt herum; ihre Summe ist alsdann = 4 R. Daraus folgt, daß alle ebenen Winkel zusammen, welche einen Körperwinkel bilden, kleiner sind als 4 R. Je kleiner diese Summe ist, je kleiner ist der hohle Körperwinkel; immer aber haben die ebenen Winkel doch noch eine Größe, welche nie 0 werden kann. Die nie erreichbaren Gränzen für die Summe aller ebenen Winkel, welche einen Körperwinkel bilden, sind daher 0 und 4 R; die Summe dieser Winkel ist stets > 0, < 4R.

20. 3 Ebenen sind erforderlich, um eine Ecke zu bilden. Der daran liegende Körperwinkel ist nun nach innen zu noch unbegränzt. Zur völligen Begränzung desselben wird also noch

Digitized by Google

eine Ebene erfordert; deßhalb sind 4 Ebenen die geringste Zahl von Ebenen, welche einen körperlichen Raum allseitig umschließen zu können.

21. Daraus ist die Entstehung desselben klar; er hat 4 Ecken und wird von 4 geradlinigen Triangeln begränzt.

22. Ein solcher Körper heißt nach der Zahl der Flächen ein Vierflach, nach der Zahl der Ecken ein Viereck (in anderem und richtigerem Sinne, als man in der ebenen Geometrie von eckigen Figuren spricht), nach der Zahl der Kanten ein Sechskant. Mit fremdem Namen heißt er Tetraëder.

23 — 25. Diese und ähnliche Vergleichungen an wirklichen Körpern sind bildend. Man läßt zuerst alle Merkmale jedes einzelnen nennen; dann die den Körpern gemeinsamen und verschiedenen.

26. Das Prisma (die Eckſäule) ist ein geometrischer (wir abstrahiren hier von den physischen Eigenschaften) Körper, welcher von zwei parallelen, congruenten, geradlinigen Grundflächen und so vielen Parallelogrammen, als jede Grundfläche Seiten hat, begränzt wird. — Da die geometrischen Körper sich wesentlich nur durch die Art der Begränzung von einander unterscheiden, so muß die Definition derselben von der Begränzung hergenommen werden.

27. Aus dieser Definition folgt, daß der Würfel auch zu den Prismen gehört. Der Würfel ist ein Prisma, welches von 6 gleichen Quadraten begränzt ist.

28. Pfosten, eckige Pfeiler, manche Salze und Steine, z. B. der Bergkristall — Glasprismen, manche Dintenfässer, Bücher u. s. w.

29. Die Prismen erhalten nach der Zahl der Seiten der Grundflächen ihre Namen — drei-, vier-, fünfseitige Prismen. Da die Zahl der das Prisma außer den Grundflächen begränzenden Parallelogramme der Zahl der Seiten der Grundflächen gleich ist, so ist das dreiseitige Prisma von 3, das vierseitige von 4, das n seitige von n Parallelogrammen begränzt.

30. Die Grundflächen der Prismen sind geradlinige Figuren, also Drei-, Vier-, Fünfecke u. s. w. Ein Prisma kann also auch Parallelogramme zu Grundflächen haben. Dann ist es von lauter Parallelogrammen begränzt.

31. Ein solches Prisma heißt ein parallelseitiges, ein Parallelepipedum. Ein Parallelepipedum ist also ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind.

32. Die Seitenflächen des Prisma stehen entweder auf der Grundfläche senkrecht oder schief.

33. In jenem Falle heißt das Prisma ein senkrechtes, in diesem ein schiefes Prisma.

Digitized by Google

34. Körperwinkel sind gleich, wenn die von ihnen umschlossenen Räume gleiche Ausdehnung haben. Nicht nothwendig decken solche einander.

35. Unter der Aehnlichkeit zweier Körper versteht man die Gleichheit ihrer Form, unter Gleichheit die gleiche körperliche Ausdehnung, unter Congruenz die Vereinigung dieser beiden Merkmale.

36. Daraus folgt, daß alle Würfel und Kugeln einander ähnlich sind.

37. Zeichnen wir den Körper auf eine Fläche, so wird das Bild desselben nothwendig verzerrt, d. h. die Zeichnung der Theile (ihre gegenseitige Größe u. s. w.) entspricht nicht genau den wirklichen Größenverhältnissen des Körpers. Der Verstand denkt also hier anders, als das Auge sieht. Es gehört deßhalb einige Uebung dazu, um aus der auf einer Ebene angebrachten Zeichnung die wirklichen Verhältnisse herauszufinden. Die Perspective lehrt die Gesetze, nach welchen Körper u. s. w. gezeichnet werden; die Geometrie hat dafür zu sorgen, daß der Verstand das Richtige denke, unabhängig von dem täuschenden Scheine. Darum nehme man die unter Nro. 37 verlangte Uebung vor. Fig. 63 kann als Beispiel dienen, wenn man sich den Mittelpunkt der Figur als Ecke, erhaben über der Fläche des Papiers, die Seiten der Figur aber als in der Ebene des Papiers liegend vorstellt.

§. 31. Der Cylinder (Walze).

1. Der Cylinder ist von 2 Arten Flächen begränzt, von einer krummen und zwei geraden, welche Kreise sind.

2. Da man nach einer Richtung gerade Linien in die krumme Seitenfläche legen kann, so ist sie nicht all-, sondern einseitig krumm.

3. Die beiden Grundflächen sind parallele, gleiche Kreise.

4. Die g. L., welche die Mittelpunkte dieser beiden Kreise verbindet, und um welche man sich den Cylinder gedreht denkt, heißt die Achse des Cylinders.

5. In Mühlen, Uhren und andern Maschinen befinden sich Walzen.

6. Der Cylinder kann auf mehrere Arten durch eine Ebene geschnitten werden. Geht der Schnitt

a) durch die Achse, so ist die Schnittfläche ein Parallelogramm; b) parallel mit der Grundfläche, so ist die Schnitt-

Digitized by Google

ebene ein Kreis; c) durch die krumme Seitenfläche, nicht parallel mit der Grundfläche, so ist die Schnittebene eine länglich krummlinige Figur, Ellipse genannt.

7. Man lernt die Ellipse am besten durch die Construction derselben kennen. Fig. 81. Man nimmt zwei feste Punkte an, a und b, legt eine in sich geschlossene Schnur um dieselben, spannt sie mit einem Stifte c an, so daß die Schnur immer um a und b herum liegt, und fährt so mit dem Stifte c rings um die Punkte a und b. Alsdann hat der Stift c eine Ellipse beschrieben.

8. Dieses beantwortet Nro. 6. Soll durch den Schnitt eines Cylinders durch die Achse in jeder Richtung ein Rechteck entstehen, so muß der Cylinder ein senkrechter, d. h. ein solcher sein, dessen Achse auf den beiden Grundflächen senkrecht steht.

9. Schief sind diejenigen Cylinder, deren Achse auf den Grundflächen schief steht.

10. Ein Cylinder ist ein geometrischer Körper, welcher von zwei parallelen und gleichen Kreisebenen und einer krummen Seitenfläche begränzt ist, in welche man nach einer Richtung gerade Linien legen kann.

11. Denke ich die Fläche eines Rechtecks um eine Seite desselben so herumgeschoben, bis die Fläche die ursprüngliche Lage wieder erreicht, so beschreibt das Rechteck einen senkrechten Cylinder. Entstanden gedacht kann der senkrechte und schiefe Cylinder so werden, indem man sich z. B. eine horizontale Kreisebene aufwärts parallel mit sich selbst und zwar den Mittelpunkt in einer g. L. fortbewegt denkt; der auf diese Art von dem Kreise zurückgelegte Raum ist ein Cylinder. Steht die Achse nicht senkrecht auf der Grundfläche, so ist der Cylinder schief.

12. Bewegt sich eine auf eine Kreisebene, in einem Punkte ihrer Peripherie, senkrecht gestellte Linie parallel mit sich selbst auf der Kreisperipherie fort, so beschreibt sie die krumme Oberfläche eines Cylinders.

§. 32. Der Kegel.

1. Der Kegel hat einen Kreis zur Grundfläche und eine einseitig krumme Fläche zur Seitenfläche, welche sich in eine Spitze verläuft.

2. Achse des Kegels heißt die g. L. von der Spitze nach dem Mittelpunkte der Grundfläche.

Digitized by Google

3. Die Achse steht entweder senkrecht oder schief auf der Grundfläche. Daher giebt es senkrechte und schiefe Kegel.

4. Der Kegel ist ein geometrischer Körper, welcher von einem Kreise als Grundfläche und einer einseitig krummen Seitenfläche, die sich in einer Spitze endigt, begränzt ist.

5. Der Kegel hat mit dem Cylinder die gemeinsamen Merkmale, daß beide einen Kreis zur Grundfläche und eine einseitig krumme Fläche zur Seitenfläche haben; sie unterscheiden sich hauptsächlich dadurch von einander, daß der Cylinder zwei Grundflächen, der Kegel eine hat, jener überall gleich dick ist, dieser sich in einer Spitze endigt.

6 und 7. Der Kegel kann auf verschiedene Weise durch eine Ebene geschnitten werden. Geht der Schnitt a) durch die Achse, so ist die Schnittebene ein geradliniges △; b) parallel mit der Grundfläche, so ist die Schnittebene ein Kreis; c) durch die krumme Seitenfläche auf beiden Seiten, so ist der Schnitt eine Ellipse; d) durch die krumme Seitenfläche, parallel mit der gegenüberliegenden Seitenlinie, so ist der Schnitt eine Parbel oder Wurflinie; e) durch die krumme Seitenfläche, so daß die Schnittebene die gegenüber liegende Seitenlinie, über die Spitze des Kegels hinaus verlängert, treffen würde, so ist der Schnitt ein Hyperbel.

8. Parbel, Hyperbel, Ellipse sind sämmtlich krummlinige Figuren, sämmtlich Kegelschnitte; Parbel und Hyperbel haben Peripherien, welche nicht geschlossen sind, sondern deren Schenkel immer weiter auseinander laufen; Ellipse und Kreis sind Figuren, deren Peripherien geschlossen sind.

9. Vorzugsweise nennt man die 3 Figuren, Parbel, Ellipse und Hyperbel, Kegelschnitte. Eigentlich aber sind Kreis und △ auch Kegelschnitte.

10 u. 11. Durch jede parallel mit der Grundfläche, zwischen ihr und der Kegelspitze, hindurch geführte Ebene wird der Kegel in 2 Theile getheilt, von welchen der obere ein ganzer, der untere aber ein abgestumpfter Kegel ist. Ein abgeschnittener Kegel ist ein solcher, welcher von 2 parallelen Kreisen und einem Theile der krummen Kegeloberfläche begränzt ist.

12. Bäume stellen theils ganze, theils abgestutzte Kegel vor; Säulen sind gewöhnlich abgestumpfte Kegel u. s. w.

13 u. 14. Wenn sich die Ebene eines rechtwinkligen △ um eine seiner Katheten so herumschwingt, bis sie zur anfänglichen Lage wieder zurückkehrt, so beschreibt die Dreieckebene den körperlichen Raum eines Kegels, die bewegte Kathete die Grundfläche, die Hypothenuse die krumme Kegeloberfläche; die ruhende Kathete bildet die Achse des senkrechten Kegels. — Der schiefe Kegel kann nicht auf diese Weise, auch nicht durch

Digitized by Google

ähnliche Bewegung eines schiefwinkligen △, entstanden gedacht werden. Man denkt ihn dadurch entstanden, daß von einem, außerhalb der Ebene eines Kreises, jedoch nicht senkrecht über der Mitte desselben, liegenden Punkte unzählig viele g. L. nach der Peripherie des Kreises gezogen werden; dann ist der zwischen der Kreisebene und allen diesen g. L liegende Raum der Raum eines schiefen Kegels.

15. Wenn eine g. L., deren eine Endpunkt unbeweglich ist, sich so dreht, daß der andere Endpunkt auf der Peripherie eines Kreises herumgeht, so legt diese g. L. den Weg einer krummen Kegeloberfläche zurück.

§. 33. Die Pyramide (Spitzsäule).

1. Diese Merkmale werden an wirklichen Pyramiden aufgesucht.
2. Zur Umgränzung einer Pyramide sind zum mindesten 4 Ebenen erforderlich.
3. Der Tetraëder oder das Vierflach ist eine dreiseitige Pyramide.

4 u. 5. Eine Pyramide ist ein geometrischer Körper, welcher von einer geradlinigen Figur als Grundfläche und so vielen in einer Spitze zusammenfallenden Dreiecken begränzt ist, als die Grundfläche Seiten hat.

6. Eine Pyramide, deren Grundfläche 3, 4, 5, n Seiten hat, heißt eine drei-, vier-, fünf-, n seitige.
7. Die Kantenlinien einer Pyramide können einander gleich und ungleich, und die Seitendreiecke unter gleichen und ungleichen Winkeln gegen die Grundfläche geneigt sein.
8. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer geradlinigen Figur nach allen Winkelpunkten derselben g. L., so entsteht ein geschlossener, pyramidalisch gestalteter Raum.

9 — 11. Der Kegel kann als eine Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche unzählig viele Seiten hat und von unzählig vielen Seitendreiecken begränzt ist.

12. Die berühmten egyptischen Pyramiden, manche Salz- und Steinmassen u. s. w.
13. Wird eine Pyramide durch eine Ebene, parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so entsteht eine der Grundfläche parallel liegende und ihr ähnliche Figur. Der obere abgeschnittene Theil ist eine vollständige, der untere eine abgeschnittene Pyramide.

Digitized by Google

14. Unter der Höhe einer Pyramide versteht man das Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche oder deren Verlängerung.

§. 34. Die Kugel.

1. Eine Kugel ist ein geometrischer Körper, welcher von einer (krummen) Oberfläche begränzt ist, deren Punkte von einem im Inneren der Kugel liegenden Punkte gleich weit abstehen. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt der Kugel.
2. 2 Kugeln liegen entweder ganz außer einander a) ohne, b) mit Berührung der Oberflächen in einem Punkte; oder die eine liegt ganz in der andern a) ohne, b) mit Berührung der Oberflächen in einem Punkte; oder sie liegen zum Theil in, zum Theil außer einander.

   Fallen die Mittelpunkte zweier (ungleichen) Kugeln zusammen, so nennt man sie concentrische, sonst aber eccentrische Kugeln.
3. Die bemerkenswerthesten Lagen dreier Kugeln sind a) wenn sie sich alle von außen; b) von innen berühren, so daß eine die übrigen umschließt; c) wenn sie concentrisch sind — u. s. w.
4. Eine Ebene liegt entweder ganz außerhalb einer Kugel, oder sie berührt sie in einem Punkte, oder sie durchschneidet sie.
5. Unter einer Berührungs- oder Tangential-Ebene versteht man eine solche Ebene, welche mit der Kugeloberfläche nur einen einzigen Punkt gemein hat.
6. Wird eine Kugel mit einer Ebene durchschnitten, so entsteht ein Kreis.
7. u. 8. Je näher die Ebene dem Mittelpunkte der Kugel, desto größer; je entfernter, desto kleiner ist dieser Kreis. Diejenigen dieser Kreise sind die größten, deren Mittelpunkte mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfallen.
9 — 11. Es sind unzählig viele größte Kreise der Kugel möglich. Alle ihre Mittelpunkte liegen im Mittelpunkte der Kugel; ihre Halbmesser fallen mit den Halbmessern der Kugel zusammen; ihre Peripherien messen den ganzen Umfang der Kugel.
12. 2 größte Kreise durchschneiden einander in einem Durchmesser der Kugel; ihre Peripherien theilen einander gegenseitig in 2 gleiche Theile.
13. 3 größte Kreise können einander so schneiden, daß jeder auf den beiden andern senkrecht steht.
14. Diese 3 Kreise durchschneiden einander in 6 Punkten, durch

Digitized by Google

welche jede Peripherie in 4 gleiche Theile getheilt wird. Die Kugeloberfläche zerfällt dadurch in 8 gleiche Theile. Die beiden Theile der Kugel, in welche sie durch jeden größten Kreis zerfällt, heißt eine Halbkugel.

15. Die 8 Theile der Kugeloberfläche sind eben so viele krummlinige Dreiecke.

16. Ein Kugel- oder sphärisches △ ist ein solches, dessen Fläche ein Theil der Kugelfläche und dessen Seiten Theile größter Kreise sind.

17. Ein Kugeldreieck entsteht dadurch, daß 3 größte Kreise einander durchschneiden.

18. Die Seiten der Kugeldreiecke sind Theile der Peripherien größter Kreise.

19. Da jede 2 Peripherien größter Kreise derselben Kugel einander wechselseitig halbiren, so kann keine Seite eines Kugeldreiecks 180° groß sein; sondern jede ist $< 180°$.

20 u. 21. Jede Seite eines sphärischen △ mißt einen der drei Winkel am Mittelpunkte der Kugel, welche eine Ecke bilden. Alle Winkel einer Ecke sind $< 4\,R < 360°$, folglich sind auch die 3 Seiten eines Kugeldreiecks $< 360°$.

22. Die Winkel des sphärischen △ sind in Ansehung der Form der Schenkel krummlinig, in Betreff ihrer Größe entweder spitze, oder rechte, oder stumpfe.

23. Sphärische Nebenwinkel und Scheitelwinkel liegen an dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der Peripherien zweier größten Kreise.

24. Eine gute Uebung.

25. Das sphärische △ hat eine krumme Fläche und krumme Seitenlinien, das ebene △ eine ebene Fläche und gerade Seiten. Sind die Seiten des sphärischen △ unendlich klein, so kann dasselbe als ein ebenes △ angesehen werden.

26. Den kürzesten Abstand zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel bildet der zwischen ihnen liegende Bogen eines größten Kreises, welcher durch diese beiden Punkte gelegt ist.

27. Die Kugelfläche hat von außen eine gewölbte, von innen eine hohle Form.

28. Die Decke (der Baldachin) des Himmels erscheint dem Auge unter der Form eines von oben etwas platt gedrückten Gewölbes.

29. Kugelförmige Körper der Natur sind z. B. die Sonne, Mond und Sterne.

30. Wie kein Theil der Erde, so kann auch kein Theil des Himmelsgewölbes oben oder unten genannt werden.

Digitized by Google

31. Größte Kreise des Erdglobus sind z. B. der Meridian (Mittagskreise), der Aequator u. s. w.

32. Kleinere Kreise der Erdkugel sind z. B. die Wendezirkel, die Polarkreise, überhaupt alle Breitenkreise.

33. Da jeder Meridian eines Ortes (als ganzer Kreis gedacht) ein größter Kreis der Erdkugel ist, so ist er an Länge dem Aequator gleich (hier abgesehen von der abgeplatteten Gestalt der Erde).

34. Achsen und Polen haben diejenigen Kugeln, welche sich um eine beständige Linie umdrehen, wie z. B. die Planeten, durch deren Achsen die Pole bestimmt werden.

35. Eine Kugelachse ist derjenige Durchmesser einer Kugel, um welche sie sich wälzt.

36. Unter den Pole einer Kugel versteht man die Endpunkte der Achsenlinie, um welche sie sich dreht; unter den Polen eines größten Kreises die Endpunkte der auf dem größten Kreise, im Mittelpunkte desselben, senkrecht errichteten und bis zur Kugeloberfläche verlängerten geraden Linie. Die Pole des Aequators der Erde fallen mit den Polen der Erde selbst zusammen.

37. Wenn sich eine Kugel um eine Achsenlinie schwingt, so nimmt der Mittelpunkt als mathematischer Punkt nicht Theil an dieser Drehung. Dasselbe gilt von der Achsenlinie und den Polen. Jeder andere Punkt der Oberfläche aber beschreibt bei jeder Umdrehung einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt. Die Punkte auf dem Aequator beschreiben die größten Kreise; je weiter ein Punkt der Oberfläche vom Aequator entfernt, oder je größer seine geographische Breite ist, desto kleiner wird der Umdrehungskreis, bis derselbe für die Pole selbst in einem Punkt zusammenschwindet.

38. Dreht sich die Kugel nicht nur um eine Achse, sondern schreitet sie auch zugleich von ihrer Stelle fort; hat sie also eine rotirende und zugleich fortschreitende Bewegung: so hat jeder Punkt der Kugel, mit Ausnahme der Punkte in der Achse, eine doppelte Bewegung, sich umdrehend um einen Achsenpunkt, und zugleich auf der Bahn der Kugel fortschreitend. So findet es sich an den Planeten.

39. Wenn sich die Fläche eines Halbkreises um ihren festliegenden Durchmesser so umschwingt, bis sie wieder die erste Lage einnimmt, so beschreibt die Fläche des Halbkreises einen Kugelraum; durch die Peripherie des Halbkreises entsteht die Oberfläche der Kugel.

Digitized by Google

§. 35. Die regelmäßigen Körper.

1. Siehe §. 29 Nro. 42!

2. Antwort: 4. Durch 3 nicht in derselben g. L. liegende Punkte wird die Lage einer Ebene bestimmt, und durch 4 Punkte, von welchen nicht 3 in derselben g. L. liegen, werden 4 Ebenen bestimmt, und so viele Ebenen sind zum wenigsten erforderlich, um einen körperlichen Raum durch Ebenen allseitig zu begränzen.

3. Die Antworten auf diese Aufforderungen sollen an wirklichen Körpern gesucht werden. Hier wollen wir sie nur vom regelmäßigen Achteck (Oktaëder) geben. Wir bemerken an demselben: 6 Ecken, 8 Flächen, nämlich 8 gleichseitige Dreiecke — $8.3 = 24$ ebene Winkel, von welchen an jeder Ecke 4 zusammenstossen $\frac{8.3}{2} = 12$ Kanten und 12 Kantenlinien — 3 Ecken-, 4 Flächen-, 6 Kantenachsen.

4. Regelmäßige Körper werden also gebildet von 4, 8 und 20 gleichseitigen Dreiecken, von 6 regelmäßigen Vier- und 12 regelmäßigen Fünfecken.

5. Um zu untersuchen, wie viele Winkel regulärer Figuren in einem Punkte zusammenstossen können, um einen Körperwinkel zu bilden, brauchen wir uns nur des obigen Satzes zu erinnern, durch welchen nachgewiesen wurde, daß alle ebenen, eine Ecke bildenden Winkel zusammen kleiner als 4 R sind. Es dürfen also immer nur so viele Winkel zusammengestoßen werden, daß ihre Summe kleiner ist als 4 R. Sobald die Summe der zusammengedachten Winkel gleich oder größer ist als 4 R, so kann durch sie keine Ecke mehr entstehen.

a) Gleichseitige Dreiecke.

Wenn 3 Winkel gleichseitiger Dreiecke in einem Punkte zusammentreffen, um eine Ecke zu bilden, so ist, da jeder $= \frac{2}{3}$ R, ihre Summe $= 3.\frac{2}{3}$ R $= 2$ R, also kleiner als 4 R. Folglich ist eine solche Ecke möglich. Es kann also ein regelmäßiger Körper construirt werden, an welchem in jeder Ecke 3 ebene Winkel regulärer $\triangle\triangle$ zusammentreffen. Dieß ist der Fall am regulären Vierflach (Tetraëder).

Nehmen wir

4 solcher Winkel; jeder $= \frac{2}{3}$ R, also 4 derselben $= 4.\frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ R, folglich < 4 R; also möglich. Das reguläre Achtflach.

5 Winkel; jeder $= \frac{2}{3}$ R, also 5 derselben $= 5.\frac{2}{3}$ R

Digitized by Google

$= {}^{10}/_{3}$ R $= 3{}^{1}/_{3}$ R, folglich < 4 R; also möglich. Das reguläre Zwanzigflach.

6 Winkel; jeder $= {}^{2}/_{3}$ R, also 6 derselben $= 6.{}^{2}/_{3}$ R $= {}^{12}/_{3}$ R $= 4$ R; also nicht mehr möglich.

Noch weniger kann ein regulärer Körper gefunden werden, an welchem die Ecke von 7 oder mehr Winkeln regulärer Dreiecke gebildet wird.

Von regulären Dreiecken sind also 3 regelmäßige Körper begränzt: das Vier-, Acht- und Zwanzigflach.

b) Regelmäßige Vierecke.

3 Winkel; jeder $=$ R, 3 derselben also $= 3$ R; folglich möglich. Das regelmäßige Sechsflach (der Würfel).

4 Winkel; jeder $=$ R, 4 derselben also $= 4$ R; folglich nicht mehr möglich.

Mit regelmäßigen Vierecken ist also nur 1 regelmäßiger Körper möglich, nämlich der Würfel.

c) Regelmäßige Fünfecke.

3 Winkel; jeder ist $= {}^{6}/_{5}$ R $= 1{}^{1}/_{5}$ R; 3 derselben also $= 3.1{}^{1}/_{5}$ R $= 3{}^{3}/_{5}$ R; folglich möglich. Das regelmäßige Zwölfflach.

4 Winkel; jeder $= {}^{6}/_{5}$ R; 4 derselben also $= 4.{}^{6}/_{5}$ R $= {}^{24}/_{5}$ R $= 4{}^{4}/_{5}$ R; folglich nicht mehr möglich.

Von regelmäßigen Fünfecken ist nur 1 regelmäßiger Körper begränzt, das Zwölfflach.

d) Regelmäßige Sechsecke.

3 Winkel; jeder $= {}^{8}/_{6}$ R, 3 derselben also $3.{}^{8}/_{6} = {}^{24}/_{6}$ $= 4$ R; folglich nicht möglich.

Von regelmäßigen Sechsecken, und noch weniger von regelmäßigen Siebenecken u. s. w., kann also kein regelmäßiger Körper begränzt sein.

Es giebt also keine anderen als die bisher genannten 5 regelmäßigen Körper: das Vier-, Sechs-, Acht-, Zwölf- und Zwanzigflach.

6. Vorstehend sind die regelmäßigen Körper nach der Anzahl der sie begränzenden regelmäßigen Figuren benannt worden. Man kann sie aber auch nach ihren übrigen Merkmalen definiren. Geschieht dieß

a) nach der Anzahl der an ihnen befindlichen Ecken, so heißen sie: Viereck, Sechseck, Achteck und Zwanzigeck.

b) Nach der Anzahl und Art der sie begränzenden Ebenen, so heißen sie: der von 4 gleichseitigen $\triangle\triangle$; der von 6

Digitized by Google

Quadraten, der von 8 gleichseitigen △△, der von 12 regelmäßigen Fünfecken, der von 20 gleichseitigen △△ begränzte Körper.

c u. d) Nach der Anzahl und Größe der Kantenlinien und Kanten (= Flächenwinkel), so heißen sie: der von 6 gleichen Kantenlinien oder Kanten begränzte Körper, kürzer: das Sechskant, das Zwölfkant, das Zwölfkant, das Dreißigkant, ~~das Dreißigkant~~.

7. In allen diesen regelmäßigen Körpern giebt es einen Punkt, von welchem alle den Körper begränzenden Ebenen und alle Winkelpunkte gleich weit entfernt sind. Jene Entfernung bestimmt die Größe des Halbmessers derjenigen Kugel, welche so in den Körper beschrieben gedacht werden kann, daß sämmtliche Ebenen die Oberfläche der Kugel berühren; diese Entfernung bestimmt die Größe des Halbmessers derjenigen Kugel, welche so um den Körper geschrieben gedacht werden kann, daß alle Eckpunkte des Körpers in der Oberfläche der Kugel liegen.

8. Je mehr sich ein regelmäßiger Körper der runden Form nähert, welches in dem Grade der Fall ist, in welchem die Anzahl der ihn begränzenden Flächen wächst, je mehr nähert sich die Größe seiner Oberfläche der Oberfläche der Kugel und die Größe seines Körperraumes dem Raumesinhalt der Kugel.

9. An dem Vierflache und Zwölfflache steht jeder Seitenebene eine Ecke, an dem Sechs-, Acht- und Zwanzigflache jeder Seitenebene eine andere Seitenebene parallel gegenüber.

10. Zur Bildung des regelmäßigen Vierflachs sind 4 △△ erforderlich. Wenn man 3 △△ zusammenlegt, so daß sie eine Ecke bilden, so bleibt der von diesem Körperwinkel begränzte Raum auf einer Seite unbegränzt. Denselben zu begränzen, ist noch ein △ erforderlich; also 4 △△.

Zur Bildung des regelmäßigen Achtflachs sind 8 △△ erforderlich. 4 △△ bilden einen Körperwinkel; die unbegränzte Seite dieses Winkelraums hat die Gestalt eines Vierecks. An den dadurch entstandenen unvollständigen Ecken des Körpers stoßen jetzt nur 2 Flächen zusammen. Soll der Körper regelmäßig werden, so müssen an jeder Ecke so viel △△ zusammenstoßen, wie an der ersten, nämlich 4. Legt man an jede der 4 ersten Flächen eine an, so daß sie an den unvollständigen Ecken zusammenstoßen, so werden diese Ecken dadurch vollständig, und die 4 neuen △△ lassen sich so zusammenlegen, daß sie unter sich eine vollständige Ecke bilden. Dadurch erhält der Körper 8 regelmäßige △△ zur Gränze.

Um den Würfel zu bilden, errichtet man auf einer Quadratfläche in jeder der 4 Seiten 4 gleich große Quadrate senkrecht. Die 4 Seiten dieser 4 Quadrate, welche den Seiten

Digitized by Google

des ersten Quadrats, auf welchen sie errichtet sind, gegenüber stehen, liegen in einer Ebene und bilden die Seiten eines 6ten Quadrats, welches den Körperraum schließt.

Fügt man an einer Ecke 5 regelmäßige △△ zusammen, so entsteht eine fünfseitige Ecke. Der dadurch zum Theil begränzte Raum hat an der unbegränzten Seite ein regelmäßiges Fünfeck zur Gränze. An jedem Winkelpunkte desselben stoßen 2 △△ zusammen. Damit der zu bildende Körper regelmäßig werde, so müssen an jeden Winkel noch 3 △△ angefügt werden; im Ganzen also noch 5 × 3 = 15 △△. Es bleibt dann aber noch ein fünfseitiger Raum unbegränzt, zu dessen Schließung noch 5 △△ erfordert werden. Dadurch erhält der Körper 20 regelmäßige △△ zur Gränze.

Zur Bildung des regelmäßigen Zwölfflachs sind 12 regelmäßige Fünfecke erforderlich. Legt man an ein Fünfeck 5 andere Fünfecke, so daß diese unter einander zusammenstoßen, so bilden sie 5 unvollständige Ecken, deren jede durch ein Fünfeck vollständig gemacht werden kann. Der Körperraum erhält dadurch 11 Fünfecke zur Begränzung. Allein die 5 angesetzten Flächen stoßen so zusammen, daß zur Schließung des Körperraumes noch ein Fünfeck erforderlich ist. Im Ganzen begränzen ihn dann 12 Fünfecke.

Anmerkung. In der vorstehenden, oder in ähnlicher Weise mache man die Aufgaben in Nro. 10 anschaulich.

11. Zum Versuche.
12. Die Verfertigung der regulären und anderen geometrischen Körper ist für den Schüler eine sehr nützliche und in der Regel sehr angenehme Beschäftigung. Wer einiges Geschick zu Handarbeiten hat, erwirbt sich darin bald einige Fertigkeit.

§. 36. Vermischte Fragen und Aufgaben über Körperfiguren.

1. Der Cubikfuß ist ein körperlicher, nach 3 Richtungen ausgedehnter Raum, welcher 1 Fuß lang, breit und hoch ist. Für sich verständlich sind danach die Ausdrücke: Cubikzoll, Cubiklinie, Cubikruthe, Cubikmeile.
2. Der Quadratfuß enthält bekanntlich nach dem Decimalmaaß 100, nach dem Duodecimalmaaß 144 Quadratzoll. Da nun der Cubikfuß nach beiden Eintheilungen 10 und 12 Zoll hoch ist, so enthält der Cubikfuß 10.100 = 1000 Cubikzoll dc. und 12.144 = 1728 Cubikzoll ddc. Ebenso enthält der Cubikzoll 1000 Cubiklinien dc. und 1728 Cubiklinien ddc.; folglich enthält der Cubikfuß 1000.1000 = 1000000 Cubiklinien dc. und 1728.1728 = 2975984 Cubiklinien ddc.

Digitized by Google

3. Leicht einzusehen ist es nun, auf welche Weise höhere Einheiten körperlicher Räume in niedere verwandelt werden, und umgekehrt. Jedoch muß überall angegeben sein, ob die zehn- oder zwölftheilige Eintheilung der Längeneinheiten angenommen werden soll. Die nachfolgenden Beispiele werden die Einsicht steigern.

4. a) Decimalmaaß.

1 Längenruthe = 10 Längenfuß; folglich 1 Cubikruthe = 1000 Cubikfuß (1000 C') = 1000.1000.C'' = 1000.1000.1000.C''' = 1000000000.C''', folglich 38 Cubikruthen = 38000000000 C''' dc.

b) Duodecimalmaaß.

$38.C^0 = 38.1728.C' = 65664.C'$
$= 65664.1728.C'' = 113467392.C''$
$= 113467392.1728.C'''$
$= 196071653376.C'''$ ddc.

$5400.C' + 364.C'' = {}^{5400}/_{1000}.C^0 + {}^{364}/_{1000000}.C^0$ dc.
$= 5{,}400364.C^0$ dc.

$284332\,C''$ ddc. $= {}^{248332}/_{1728}.C'$ ddc. $= 143^{1228}/_{1728}.C'$ ddc.
$= 143^{307}/_{432}.C'$ ddc.

5. a) Um den Rauminhalt eines Würfels zu berechnen, multiplicirt man die Einheiten, in welchen die Länge einer Seite desselben ausgedrückt ist, mit denselben Einheiten der Breite und Höhe des Würfels.

Länge einer Seite = 10' 4'' dc. = 104'' dc.; also der Cubikinhalt des Würfels, in Decimalzoll ausgedrückt

$= 104.104.104 = 1124864.C''$ dc.
$= {}^{1124864}/_{1000}.C'$ dc. $= 1124{,}864.C'$ dc.
$= 1.C^0 + 124.C' + 864.C''$ dc.

Länge der Seite des Würfels = 52° 8' 11'' ddc. = 7595'' ddc.; folglich der Cubikinhalt des Würfels

$= 7995.7595.7595.C''$ ddc.
$= \frac{7595 \cdot 7595 \cdot 7595}{1728}.C'$ ddc.
$= \frac{7595 \cdot 7595 \cdot 7595}{1728 \cdot 1728}.C^0$ ddc.
$= 146722.C^0 + 361.C' + 1619.C''$.

Der Cubikinhalt eines senkrechten Parallelpipedums wird gefunden, wenn man die Zahlen, welche die Länge, Breite und Höhe desselben in denselben Einheiten bezeichnen, mit einander multiplicirt.

Ist die Länge eines solchen = 12', Breite = 9', Höhe = 4', so ist sein Cubikinhalt = 12.9.4 = 432.C'. —

Ist die Länge eines Parallelpipedums = 20' 4'' dc. =

Digitized by Google

204″, seine Breite = 12′ 8″ = 128″, seine Höhe = 6′ = 60″, so ist sein Cubikinhalt = 204.128.60.C″ = 1566720.C″ = 1566.C′ + 720.C″ = 1.C° + 566.C′ + 720.C″.

Werden die Länge, Breite und Höhe dieses Zimmers durch die Zahlen 25′, 20′, 16′ ausgedrückt, so enthält dasselbe 25.20.16 = 8000 C′ Luft. —

Richtiger als der Ausdruck Decimal-Cubikfuß ist der Ausdruck Cubik-Decimalfuß. (Siehe §. 16 Nro. 26!)

6. Fig. 63.

7—10. Jedes Prisma und jede Pyramide werden die gegebene allgemeine Darstellung versinnlichen.

11. Man kann sich die krumme Seitenfläche des Cylinders in eine Ebene abgewickelt vorstellen. Dieselbe verwandelt sich dadurch in ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich ist der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe gleich ist der Höhe des Cylinders. Die Größe der krummen Seitenfläche eines Cylinders wird daher berechnet, indem man die beiden Zahlen, welche die Länge der Peripherie der Grundfläche und die Höhe des Cylinders in denselben Einheiten angeben, mit einander multiplicirt.

12. Auf ähnliche Weise kann man die krumme Seitenfläche eines senkrechten Kegels in eine Ebene gelegt denken. Dieselbe wird gleich dem Ausschnitt eines Kreises, dessen Halbmesser gleich ist der Länge der Seite des Kegels und dessen Bogen gleich ist dem Umfange der Grundfläche des Kegels. Man findet daher die Größe der krummen Seitenfläche des senkrechten Kegels, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der Länge der Seite des Kegels multiplicirt.

13. Der Cylinder kann als ein Prisma angesehen werden, dessen Grundfläche von unendlich vielen Seiten und welches also auch von unendlich vielen Parallelogrammen begränzt ist.

14. Die sinnliche Darstellung des Gedachten sollte überall, wo sie nur statt finden kann, versucht werden.

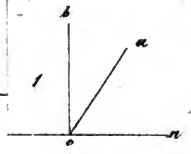
15. Die Größe des Körperraumes, welchen ein Prisma einnimmt, hängt von der Grundfläche und Höhe desselben ab. Wenn daher 2 Prismen diese beiden, die Größe des Cubikinhaltes bestimmenden, Merkmale gleich haben, d. h. wenn 2 Prismen gleiche Grundflächen und Höhen haben, so sind auch ihre Körperräume einander gleich.

16. Wenn die Durchmesser zweier Kugeln sich zu einander verhalten = 1 : 2, so verhalten sich ihre Oberflächen = 1 : 4, und ihre Raumesinhalte = 1 : 8. Wenn die Durchmesser zweier Kugeln sich zu einander verhalten = 1 : 3, so verhalten sich die Oberflächen der Kugeln = 1 : 9, und ihre Raumesinhalte = 1 : 27.

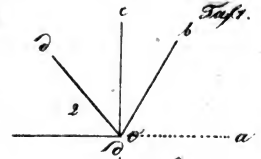
Die Beweise dieser Sätze enthält die wissenschaftliche Geometrie. Hier möge der Schüler nur vermuthend den gestellten Aufgaben nachsinnen.

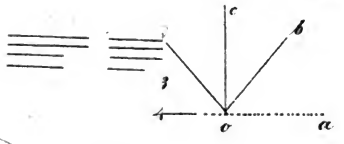
Digitized by Google

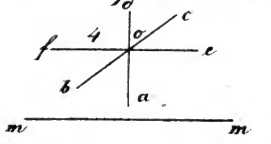
4

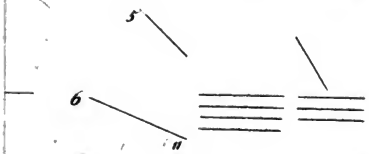


9

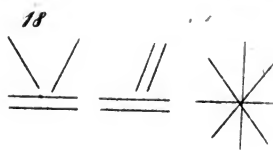






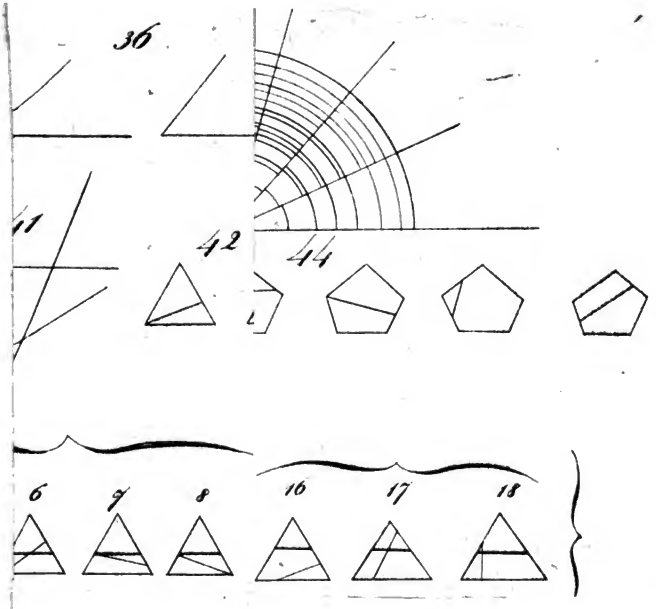


18

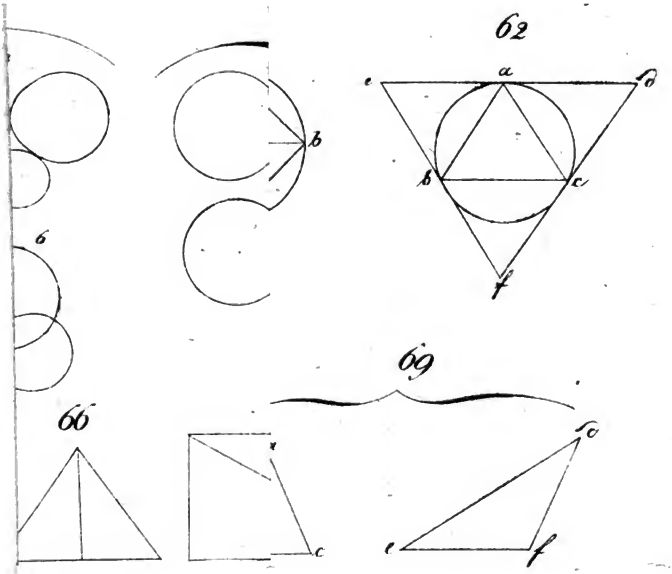


22

Digitized by Google


36
41
42
44
6
7
8
16
17
18

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06389 5026

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06389 5026

Digitized by Google